2 எண்களும் தொடர்வரிசைகளும்

எண்கள் அழகுத் தன்மை பொருந்தியவை என எனக்கு தெரியும் அவை அழகில்லை எனில் எதுவுமே அழகில்லை **–பால் ஏர்டிஷ்**

ஸ்ரீநிவாச இராமானுஜன்
(1887-1920)

ஸ்ரீநிவாச இராமானுஜன் ஈரோட்டில் ஏழைக் குடும்பத்தில் பிறந்த மாபெரும் இந்தியக் கணித மேதை ஆவார். சிறு வயதிலேயே கணிதத்தில் திறன் மிக்கவராகவும் மற்றும் மின்னல் வேகத்தில் கணக்கீடுகளைச் செய்யும் ஆற்றலும் பெற்றிருந்தார். இவர் ஆயிரக்கணக்கான சூத்திரங்களைத் தருவித்து அவற்றைத் தனது மூன்று குறிப்பேடுகளில் எழுதி வைத்தார். அவரது குறிப்பேடுகள் இன்றும் சென்னைப் பல்கலைக் கழகத்தில் பாதுகாக்கப்படுகின்றன. பல பெருமக்களின் உதவியுடன் சென்னைப் பல்கலைக்கழகத்தின் முதல் ஆராய்ச்சி மாணவரானார். பிறகு இங்கிலாந்து சென்று 1914 முதல் 1919 வரை கணித வல்லுநர் G.H. ஹார்டியுடன் இணைந்து பல ஆய்வுகளை மேற்கொண்டார்.

இராமானுஜன் எண்களின் அமைப்புப் பற்றி ஆராய்வதில் மிகுந்த ஆர்வம் கொண்டிருந்தார். அதன் விளைவாகப் பகுமுறை எண்கணிதத்தில் எண்ணற்ற புதிய கருத்துகளை உருவாக்கினார். இவரது கணிதத் திறமையை மாபெரும் கணித மேதைகளான ஆய்லர் மற்றும் ஜெகோபியுடன் ஒப்பிடுகின்றனர். இராமானுஜன் 30 ஆய்வுக் கட்டுரைகளும் மற்றும் G.H. ஹார்டியுடன் இணைந்து 7 ஆய்வுக் கட்டுரைகளும் படைத்துள்ளார். தன்னுடைய 32 வருடக் குறுகிய ஆயுட்காலத்தில் இவர் 3972 சூத்திரங்கள் மற்றும் தேற்றங்களை உருவாக்கியுள்ளார். இவருடைய ஆராய்ச்சிக்காகக் கேம்பிரிட்ஜ் பல்கலைக் கழகம் இவருக்கு 1916 ஆம் ஆண்டு B.A. ஆய்வு பட்டம் வழங்கியது. இது இன்றைய முனைவர் (Ph.D.) பட்டத்திற்கு இணையானது. எண்கணிதத்தில் இவருடைய பங்களிப்பிற்காக இலண்டன் ராயல் சொசைட்டியின் மதிப்புமிகு உறுப்பினர் (Fellow of Royal Society - F.R.S.) அந்தஸ்து 1918–யில் வழங்கப்பட்டது.

இராமானுஜனின் கண்டுபிடிப்புகள் இன்றும் உலகளவில் கணித வல்லுநர்களைக் கவர்ந்துள்ளது. ஒரு நூற்றாண்டுக்கு முன்பே தனது வாழ்நாளின் இறுதிக் காலத்தில் இவர் இயற்றிய குறிப்புகள் இன்றைய நவீன அறிவியலோடு தொடர்புடையதாக விளங்குகின்றன.

SHLMI5

கற்றல் விளைவுகள்

- யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றக் கருத்தை அறிதல்.
- யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம கண்டறிதல்.
- அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- 'n'–யின் ஒருங்கிசைவு மட்டு, 'n'–யின் கூட்டல் மட்டு மற்றும் 'n'–யின் பெருக்கல் மட்டு ஆகியவற்றைப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- தொடர் வரிசையை வரையறை செய்தல் மற்றும் தொடர் வரிசையை ஒரு சார்பாகப் புரிந்து கொள்ளுதல்.
- கூட்டுத் தொடர்வரிசை (A.P) மற்றும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையை (G.P) வரையறை செய்தல்.
- கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n ஆவது உறுப்பு மற்றும் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதலைக் கண்டறிதல்.
- பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் n ஆவது உறுப்பு மற்றும் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதலைக் கண்டறிதல்.
- $\sum n, \sum n^2, \sum n^3$ போன்ற சில முடிவுறு தொடர்களின் கூடுதலை அறிதல்.

2.1 அறிமுகம் (Introduction)

பல ஆயிரம் ஆண்டுகளுக்கு முன்பிருந்தே மனிதர்களுக்கு எண்களைப் பற்றிப் படிப்பது மிகுந்த ஆர்வத்தை ஏற்படுத்துவதாக அமைந்திருந்தது. $25,000$ ஆண்டுகளுக்கு முன்பு பயன்படுத்திய லெபாம்போ மற்றும் இஷாங்கோ எலும்புகளின் கண்டுபிடிப்பானது மனிதர்கள் தங்களது அன்றாட தேவைகளுக்குக் கணக்கிடும் முறைகளைப் பயன்படுத்தியதை உணர்த்துகிறது. எலும்புகளில் குறிப்புகளை ஏற்படுத்தித் தங்களின் கணக்கிடலைத் திறமையாகப் பதிவு செய்துள்ளனர். இவை சந்திரனின் நிலையைக் கொண்டு காலநிலையைக் கணக்கிடும் சந்திர நாள்காட்டியாகப் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. எனவே, இந்த எலும்புகளைப் பழங்கால எண்ணும் கருவியாகக் கருதலாம். இந்த அடிப்படைக் கணக்கீட்டு முறையிலிருந்து இன்றைய சூழலில் நாம் பெரும் முன்னேற்றம் அடைந்துள்ளோம்.

இஷாங்கோ எலும்புகளில் எண் பதிவுகள்
படம் 2.1

பிதாகரஸ் காலம் முதல் இன்றைய நவீனக் கணித வல்லுநர்கள் வரை அனைவரும் எண்களின் அமைப்பு முறையைக் கண்டு வியப்படைகின்றனர். நாம் இங்கு யூக்ளிடின் முக்கியக் கருத்துகளை விரிவாகக் காண உள்ளோம். அதைத் தொடர்ந்து மட்டு எண்கணிதம் பற்றியும், தொடர் வரிசை மற்றும் தொடர்கள் பற்றியும் படிக்க உள்ளோம். இந்தக் கருத்துகள் அனைத்தும் உங்களது உயர் வகுப்புக் கணிதப் புரிதலுக்கு அடித்தளமாக அமையும். கணிதத்தில் கவர்ந்திழுக்கும் பகுதியான எண்களைப் பற்றிப் படிக்க வேண்டிய முக்கியப் பயணத்தைத் தொடங்க வேண்டிய நேரம் இதுவாகும்.

2.2 யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம் (Euclid's Division Lemma)

முக்கியக் கணித மேதைகளில் ஒருவராகத் திகழ்ந்த யூக்ளிட் எழுதிய புத்தகமான "எலிமண்ட்ஸ்" 13 தொகுதிகளைக் கொண்டது. முதல் ஆறு தொகுதிகள் வடிவியல் சார்ந்தவை. இதனாலேயே யூக்ளிடை "வடிவியலின் தந்தை" என அழைக்கிறோம். ஆனால், அவர் அடுத்த சில தொகுதிகளில் எண்களின் பண்புகளை அறிந்து கொள்ளப் பல அடிப்படைத் தகவல்களை வழங்கியுள்ளார். அதில் ஒன்றுதான் யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம். இது நீங்கள் முந்தைய வகுப்புகளில் செய்த எண்களின் நீள் வகுத்தல் முறையின் சுருக்கமே ஆகும்.

இங்கு நாம் யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தையும் மற்றும் அதன் பயன்பாடான யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையையும் கற்க உள்ளோம்.

> லெம்மா $(lemma)$ என்பது ஒரு முக்கியத் தேற்றத்தை நிரூபிக்க உதவும் ஒரு துணைத் தேற்றம் ஆகும். இது வழக்கமாக ஒரு சிறு தேற்றம் எனக் கருதப்படும்.

தேற்றம் 1: யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம்

a மற்றும் b $\left(a>b\right)$ என்பன ஏதேனும் இரு மிகை முழுக்கள் எனில், $a=bq+r,\ 0\leq r<b$. என்றவாறு $q,\ r$ எனும் தனித்த மிகை முழுக்கள் கிடைக்கும்.

குறிப்பு

- வகுத்தலில் கிடைக்கும் மீதியானது வகுக்கும் எண்ணைவிட எப்போதும் சிறியதாகவே அமையும்.
- $r=0$ எனில் $a=bq$. எனவே b ஆனது a ஐ வகுக்கும்.
- மறுதலையாக b ஆனது a ஐ வகுக்கும் எனில், $a=bq$

எடுத்துக்காட்டு 2.1 நம்மிடம் 34 கேக் துண்டுகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் 5 கேக்குகள் மட்டுமே வைக்க இயலுமெனில் கேக்குகளை வைக்க எத்தனை பெட்டிகள் தேவை மற்றும் எத்தனை கேக்குகள் மீதமிருக்கும் எனக் காண்க.

தீர்வு 30 கேக்குகளை வைக்க 6 பெட்டிகள் தேவைப்படுகின்றன. அதில் 4 கேக்குகள் மீதமிருக்கும். கேக்குகளைப் பெட்டிகளில் வைக்கும் இம்முறையைப் பின்வருமாறு புரிந்து கொள்ளலாம்.

34	=	5	×	6	+	4
மொத்தக் கேக்குகளின் எண்ணிக்கை	=	ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் உள்ள கேக்குகளின் எண்ணிக்கை	×	பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை	+	மீதமுள்ள கேக்குகளின் எண்ணிக்கை
↓		↓		↓		↓
(வகுபடும் எண்) a	=	(வகுக்கும் எண்) b	×	(ஈவு) q	+	(மீதி) r

குறிப்பு

- மேற்கண்ட துணைத் தேற்றமானது நீள் வகுத்தல் முறையின் மறுவடிவமே ஆகும். இங்கு q மற்றும் r என்பவை முறையே ஈவு மற்றும் மீதி ஆகும்.
- எந்தவொரு மிகை முழுவையும் 2 ஆல் வகுக்கும்போது 0 அல்லது 1 மட்டுமே மீதியாகக் கிடைக்கும். எனவே, எந்தவொரு மிகை முழுவையும் $2k$ அல்லது $2k+1$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். இங்கு k என்பது ஒரு மிகை முழு.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தை எந்த இரு முழுக்களுக்கும் பொதுமைப்படுத்த இயலும்.

பொதுமைப்படுத்தப்பட்ட யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம்

a மற்றும் b $(a>b)$ என்பன ஏதேனும் இரு முழுக்கள் எனில், $a=bq+r$, $0\leq r<|b|$ என்றவாறு q, r எனும் முழுக்கள் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.2 பின்வரும் ஒவ்வொன்றிலும் a –யை b ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க. (i) $a=-12,\ b=5$ (ii) $a=17,\ b=-3$ (iii) $a=-19,\ b=-4$

தீர்வு

(i) $a=-12,\ b=5$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி,

$a=bq+r$, இங்கு $0\leq r<|b|$

$-12=5\times(-3)+3 \quad 0\leq r<|5|$

எனவே, ஈவு $q=-3$, மீதி $r=3$

(ii) $a=17 \quad b=-3$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி,

$a=bq+r$, இங்கு $0\leq r<|b|$

$17=(-3)\times(-5)+2,\ \ 0\leq r<|-3|$

எனவே, ஈவு $q=-5$, மீதி $r=2$

(iii) $a=-19,\ b=-4$

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி,

$a=bq+r,\ \ 0\leq r<|b|$

$-19=(-4)\times(5)+1,\ 0\leq r<|-4|$

எனவே, ஈவு $q=5$, மீதி $r=1$.

சிந்தனைக் களம்

ஒரு மிகை முழுவை 3 ஆல் வகுக்கும்போது

1. கிடைக்கும் மீதிகள் எவை?
2. அவற்றை எந்த வடிவில் எழுத இயலும்?

முன்னேற்றச் சோதனை

பின்வரும் முழுக்கள் a, b ஆகியவற்றிற்கு $a=bq+r$ என்பதை நிறைவு செய்யும்படி q மற்றும் r காண்க.

1. $a=13,\ b=3$
2. $a=18,\ b=4$
3. $a=21,\ b=-4$
4. $a=-32,\ b=-12$
5. $a=-31,\ b=7$

X_Ch 2 TM.indd 39 07-02-2020 05:31:32 PM

எடுத்துக்காட்டு 2.3 ஒற்றை முழுக்களின் வர்க்கமானது $4q+1$, (இங்கு q ஆனது முழுக்கள்) என்ற வடிவில் அமையும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு x என்பது ஓர் ஒற்றை முழுக்கள் என்க. எந்தவொரு ஒற்றை முழுக்களுக்கும் ஏதேனும் ஓர் இரட்டை முழுக்களை விட ஒன்று அதிகமாக இருக்கும் என்பதால், $x=2k+1$, இங்கு k என்பது ஏதேனும் ஒரு முழுக்கள்.

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2+4k+1 \\ &= 4k(k+1)+1 \\ &= 4q+1. \text{ இங்கு, } q=k(k+1) \text{ என்பது முழுக்கள்} \end{aligned}$$

2.3 யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறை (Euclid's Division Algorithm)

முந்தைய பகுதியில், நாம் யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகளைப் படித்தோம். தற்போது யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் படிக்க உள்ளோம். Algorithm என்ற ஆங்கில வார்த்தைக்கு வழிமுறை அல்லது படிமுறை என்பது பொருளாகும். Algorithm என்ற வார்த்தை 9 ஆம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த பாரசீக நாட்டைச் சார்ந்த கணித மேதை அல்–கவாரிஸ்மி என்பவரின் பெயரிலிருந்து வந்தது. வழிமுறை (Algorithm) என்பது நமக்குத் தேவையான முடிவினைப் பெறும் வரையில் ஒரு படிநிலையில் பெறும் முடிவுகளை அதற்கு அடுத்த படிநிலையில் பயன்படுத்தும் வகையில் நன்கு வரையறை செய்யப்பட்ட தொடர்ச்சியான படிநிலைகளாகும்.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி இரு மிகை முழுக்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியை (மீ.பொ.வ) எளிய முறையில் கண்டறியலாம்.

தேற்றம் 2

a மற்றும் b என்பன $a=bq+r$, என அமையும் மிகை முழுக்கள் எனில், a மற்றும் b ஆகியவற்றின் அனைத்துப் பொது வகுத்திகளும் முறையே b மற்றும் r ஆகியவற்றின் பொது வகுத்திகளுக்குச் சமமாக இருக்கும், மேலும் இதன் மறுதலையும் உண்மை.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறை

a மற்றும் b, $a>b$ என்ற இரு மிகை முழுக்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியைக் காண,

படி 1: யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின் படி $a=bq+r\,;\ 0\le r<b$. இங்கு q என்பது ஈவு, r என்பது மீதி. $r=0$ எனில் a மற்றும் b –யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி b ஆகும்.

படி 2: அவ்வாறில்லையெனில், யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி b ஐ r ஆல் வகுக்க நாம் பெறுவது $b=rq_1+r_1,\ 0\le r_1<r$

படி 3: $r_1=0$ எனில், a மற்றும் b ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி r ஆகும்.

படி 4: அவ்வாறில்லையெனில் மீதி பூச்சியம் வரும் வரை மீண்டும் மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும். பூச்சியம் மீதியாக வரும் நிலையில் அமையும் வகுத்தியானது a மற்றும் b–யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியாகும்.

குறிப்பு

- மேற்கண்ட வழிமுறையில் நிச்சயம் ஏதாவது ஒரு படிநிலையில் மீதி பூச்சியமாகும். ஆகவே, இவ்வழிமுறை நிச்சயம் முடிவு பெறும்.
- பூச்சியம் மீதியாக வரும் வரை யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைத் தொடர்ந்து பயன்படுத்த வேண்டும்.
- a, b என்ற இரு மிகை முழுக்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி (மீ.பொ.வ) (a,b) எனக் குறிக்கப்படுகிறது.
- மீப்பெரு பொது வகுத்தியானது மீப்பெரு பொதுக் காரணி எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையானது மீதி _______ வரும் வரை யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தைத் தொடர்ந்து பயன்படுத்துவதாகும்.
2. k, k என்ற இரு சமமான மிகை முழுக்களின் மீ.பொ.வ_______.

விளக்கம் 1

மேற்கண்ட வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்தி இரு மிகை முழுக்களின் மீ.பொ.வ கண்டறிவோம். $a = 273$ மற்றும் $b = 119$ ஆகியவை இரு மிகை முழுக்கள் என்க. $a > b$.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி 273 ஐ 119 ஆல் வகுக்கும் போது நாம் பெறுவது,

$$273 = 119 \times 2 + 35 \qquad \ldots(1)$$

மீதி $35 \neq 0$.

எனவே, யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையை வகுத்தி 119 மற்றும் மீதி 35 ஆகியவற்றுக்குப் பயன்படுத்தும்போது நாம் பெறுவது,

$$119 = 35 \times 3 + 14 \qquad \ldots(2)$$

மீதி $14 \neq 0$.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையை வகுத்தி 35 மற்றும் மீதி 14 ஆகியவற்றுக்குப் பயன்படுத்தும்போது நாம் பெறுவது,

$$35 = 14 \times 2 + 7 \qquad \ldots(3)$$

மீதி $7 \neq 0$.

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையை வகுத்தி 14 மற்றும் மீதி 7 ஆகியவற்றுக்குப் பயன்படுத்தும்போது நாம் பெறுவது,

$$14 = 7 \times 2 + 0 \qquad \ldots(4)$$

இந்தப் படி நிலையில் மீதி $= 0$. வகுத்தி $= 7$.

பூச்சியம் மீதியாகக் கிடைப்பதால் இந்நிலையில் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறை நிறைவு பெறும்.

எனவே, 273,119–யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி(மீ.பொ.வ) =7

எடுத்துக்காட்டு 2.4 210 மற்றும் 55 ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியை $55x - 325$, என்ற வடிவில் எழுதினால் x –யின் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்திக் கொடுக்கப்பட்ட எண்களுக்கு மீ.பொ.வ காண்போம்.

$$\begin{aligned} 210 &= 55 \times 3 + 45 \\ 55 &= 45 \times 1 + 10 \\ 45 &= 10 \times 4 + 5 \\ 10 &= 5 \times 2 + 0 \\ \text{மீதி} &= 0 \end{aligned}$$

ஆகவே, கடைசி படிநிலையின் வகுத்தி 5 ஆனது 210 மற்றும் 55 –யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியாகும். மீப்பெரு பொது வகுத்தியை $55x - 325 = 5$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால்,

$$\begin{aligned} 55x &= 330 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.5 445 மற்றும் 572 –ஐ ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணால் வகுக்கும்போது முறையே மீதி 4 மற்றும் 5 –ஐ தரக்கூடிய மிகப்பெரிய எண்ணைக் கண்டறிக.

தீர்வு 445 மற்றும் 572 ஐ வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதி 4 மற்றும் 5 எனில், நமக்குத் தேவையான எண் $445-4=441$, மற்றும் $572-5=567$ ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியாகத்தான் இருக்கும்.

எனவே, நாம் 441 மற்றும் 567 ஆகிய எண்களின் மீ.பொ.வ கண்டறிவோம். யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையின்படி நாம் பெறுவது,

$$\begin{aligned} 567 &= 441\times 1+126 \\ 441 &= 126\times 3+63 \\ 126 &= 63\times 2+0 \end{aligned}$$

ஆகவே 441 மற்றும் 567 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ 63 ஆகும். எனவே தேவையான எண் 63 ஆகும்.

செயல்பாடு 1

இரு மிகை முழுக்களின் மீ.பொ.வ காண இந்தச் செயல்பாடு உதவுகிறது. முதலில் நாம் பின்வருவனவற்றை உற்று நோக்குவோம்.

(i) கொடுக்கப்பட்ட எண்களை நீள அகலங்களைக் கொண்ட செவ்வகம் ஒன்றை உருவாக்குக.

(ii) இந்தச் செவ்வகத்தைச் சிறு சதுரங்களைப் பயன்படுத்தி நிரப்ப முயற்சி செய்க.

(iii) 1×1 சதுரத்தை வைத்து முயற்சி செய்க; 2×2 சதுரத்தை வைத்து முயற்சி செய்க; 3×3 சதுரத்தை வைத்து முயற்சி செய்க; இதுபோலத் தொடர்க.

(iv) இவ்வாறு நிரப்பும்போது முழுச் செவ்வகத்தையும் நிரப்பக்கூடிய மிகப் பெரிய சதுரத்தின் பக்கமே அவ்வெண்களின் மீ.பொ.வ ஆகும்.

(v) (அ) $12,20$ (ஆ) $16,24$ (இ) $11,9$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ காண்க.

தேற்றம் 3

a மற்றும் b என்பன இரு மிகை முழுக்கள் மற்றும் $a>b$ எனில்,
$(a,\ b)$ –யின் மீ.பொ.வ $=(a-b,b)$. –யின் மீ.பொ.வ

செயல்பாடு 2

கொடுக்கப்பட்ட இரு மிகை முழுக்களின் மீ.பொ.வ காண உதவும் மற்றொரு செயல்பாடு இதுவாகும்.

(i) கொடுக்கப்பட்ட இரு எண்களில் சிறிய எண்ணைப் பெரிய எண்ணிலிருந்து கழிக்கவும்.

(ii) தற்போது கிடைத்த எண்ணையும், சிறிய எண்ணையும் எடுத்துக்கொண்டு இவ்விரு எண்களில் சிறிய எண்ணைப் பெரிய எண்ணிலிருந்து கழிக்கவும்.

(iii) இவ்வாறு பெரிய எண்ணிலிருந்து சிறிய எண்ணைத் தொடர்ந்து கழிக்கவும்.

(iv) அவ்விரு எண்களும் சமமாகும்போது இச்செயல் முறையை நிறுத்தவும்.

(v) படிநிலை (iv)-ல் சமமாக வந்துள்ள எண்ணே கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் மீ.பொ.வ ஆகும்.

மேற்கண்ட செயற்பாட்டில் கூறப்பட்ட படிநிலைகளைக் கொண்டு பின்வரும் எண்களின் மீ.பொ.வ காண்க. (i) $90,15$ (ii) $80,25$ (iii) $40,16$ (iv) $23,12$ (v) $93,13$

மூன்று எண்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி

பின்வரும் செயல்முறையைப் பயன்படுத்தி யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையின் மூலம் மூன்று மிகை முழுக்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியைக் (மீ.பொ. வ) காண இயலும்.

a,b,c என்பன கொடுக்கப்பட்ட மிகை முழுக்கள் என்க.

(i) a,b –யின் மீ.பொ. வ காண்க. அதை d எனக் கொள்க.

$$d=(a,b)$$

(ii) d மற்றும் c –யின் மீ.பொ.வ காண்க.

இந்த மீப்பெரு பொது வகுத்தியே கொடுக்கப்பட்ட மூன்று மிகை முழுக்கள் $a,\ b,\ c$ –யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.6 $396, 504, 636$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட மூன்று எண்களின் மீ.பொ.வ காண, நாம் முதலில் முதல் இரு எண்களின் மீ.பொ.வ காண்போம்.

396 மற்றும் 504 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ காண,

யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது $504 = 396 \times 1 + 108$

இங்கு மீதி $108 \neq 0$

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த $396 = 108 \times 3 + 72$

இங்கு மீதி $72 \neq 0$,

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது $108 = 72 \times 1 + 36$

இங்கு மீதி $36 \neq 0$,

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது $72 = 36 \times 2 + 0$

இங்கு மீதி $= 0$. எனவே 396 மற்றும் 504–யின் மீ.பொ.வ 36 ஆகும். 636 மற்றும் 36 –யின் மீ.பொ.வ காண, யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது $636 = 36 \times 17 + 24$

இங்கு மீதி $24 \neq 0$

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது $36 = 24 \times 1 + 12$

இங்கு மீதி $12 \neq 0$

மீண்டும் யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது $24 = 12 \times 2 + 0$

இங்கு மீதி$=0$. எனவே, 636 மற்றும் 36 –யின் மீ.பொ.வ $= 12$

எனவே $396, 504$ மற்றும் 636 –யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி 12 ஆகும்.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

இரு மிகை முழுக்களின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி 1 எனில், அவ்விரு எண்களும் சார்பகா எண்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

பயிற்சி 2.1

1. 3 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 2 –ஐத் தரக்கூடிய அனைத்து மிகை முழுக்களையும் காண்க.
2. ஒரு நபரிடம் 532 பூந்தொட்டிகள் உள்ளன. அவர் வரிசைக்கு 21 பூந்தொட்டிகள் வீதம் அடுக்க விரும்பினார். எத்தனை வரிசைகள் முழுமை பெறும் எனவும் மற்றும் எத்தனை பூந்தொட்டிகள் மீதமிருக்கும் எனவும் காண்க.
3. தொடர்ச்சியான இரு மிகை முழுக்களின் பெருக்கற்பலன் 2 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.
4. a, b மற்றும் c என்ற மிகை முழுக்களை 13 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிகள் முறையே 9, 7 மற்றும் 10 எனில் $a+b+c$ ஆனது 13 ஆல் வகுபடும் என நிரூபி.
5. எந்த மிகை முழுவின் வர்க்கத்தையும் 4 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 0 அல்லது 1 மட்டுமே கிடைக்கும் என நிறுவுக.
6. யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் மீ.பொ.வ காண்க.
   (i) 340 மற்றும் 412 (ii) 867 மற்றும் 255
   (iii) 10224 மற்றும் 9648 (iv) $84, 90$ மற்றும் 120
7. 1230 மற்றும் 1926 ஆகிய எண்களை வகுக்கும்போது மீதி 12 –ஐத் தரக்கூடிய மிகப்பெரிய எண்ணைக் காண்க.
8. 32 மற்றும் 60 ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி d என்க. $d = 32x + 60y$ எனில் x மற்றும் y என்ற முழுக்களைக் காண்க.
9. ஒரு மிகை முழுவை 88 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 61 கிடைக்கிறது. அதே மிகை முழுவை 11 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.
10. எந்த இரு அடுத்தடுத்த மிகை முழுக்கள் சார்பகா எண்கள் என நிறுவுக.

2.4 அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம் (Fundamental Theorem of Arithmetic)

பின்வரும் ஆசிரியர் மற்றும் மாணவர்களது உரையாடலைக் கருத்தில் கொள்வோம்.

ஆசிரியர் : 240 என்ற எண்ணைக் காரணிப்படுத்துக.
மலர் : 24×10
இரகு : 8×30
இனியா : 12×20
குமார் : 15×16
மலர் : யாருடைய விடை சரியானது ஐயா?
ஆசிரியர் : எல்லோருடைய விடைகளும் சரிதான்.
இரகு : எப்படி ஐயா?
ஆசிரியர் : ஒவ்வொரு காரணியையும் பகாக் காரணிகளாகப் பிரிக்கவும்.
மலர் : $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5$
இரகு : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$
இனியா : $2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5$
குமார் : $3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
ஆசிரியர் : நன்று ! இப்போது உங்கள் விடையில் எத்தனை 2,3,5 வந்துள்ளன.
மலர் : எனக்கு நான்கு 2, ஒரு 3 மற்றும் ஒரு 5 கிடைத்துள்ளது.
இரகு : எனக்கு நான்கு 2, ஒரு 3 மற்றும் ஒரு 5 கிடைத்துள்ளது.
இனியா : எனக்கும் நான்கு 2, ஒரு 3 மற்றும் ஒரு 5 கிடைத்துள்ளது.
குமார் : எனக்கும் அதேதான் கிடைத்தது.
மலர் : எங்கள் அனைவருக்கும் நான்கு 2, ஒரு 3 மற்றும் ஒரு 5 கிடைத்துள்ளது. இது மிகவும் ஆச்சரியமாக உள்ளது.
ஆசிரியர் : ஆமாம். உண்மைதான். எந்த ஓர் எண்ணைப் பகாக் காரணிப் படுத்தினாலும் நமக்கு ஒரே விதமான பகாக் காரணிகள் தான் கிடைக்கும்.

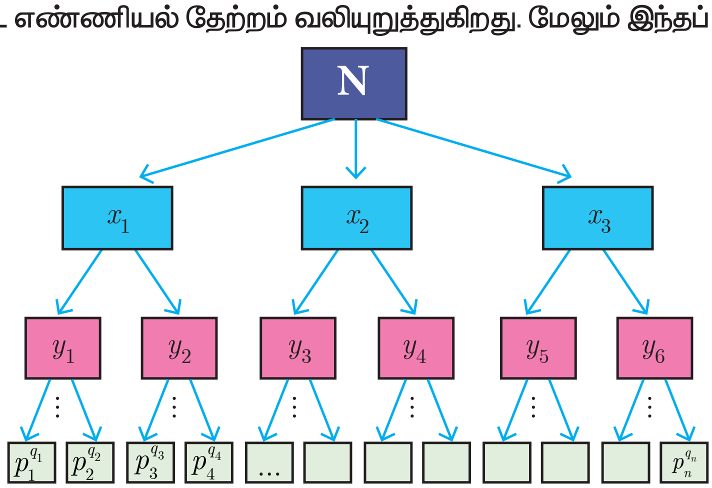
மேற்கண்ட கருத்து நம்மைப் பின்வரும் முக்கியத் தேற்றத்திற்கு அழைத்துச் செல்கிறது.

தேற்றம் 4 (அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம்) (நிரூபணம் இல்லாமல்)

"1 ஐத் தவிர்த்து மற்ற அனைத்து இயல் எண்களையும் பகா எண்களின் பெருக்கற்பலனாகக் காரணிப்படுத்த முடியும். மேலும் இந்தக் காரணிப்படுத்துதலானது (பகா எண்களை எழுதும் வரிசையைத் தவிர்த்து) ஒரே முறையில் அமையும்."

ஒவ்வொரு பகு எண்ணும் பகாஎண்களின் பெருக்கல் பலனாகப் பிரிக்கப்படலாம் (மாற்றப்படலாம்) என்ற கருத்தை அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம் வலியுறுத்துகிறது. மேலும் இந்தப் பிரித்தல் தனித்தன்மை உடையது. அதாவது ஒரே விதமான பகா எண்களின் பெருக்கற்பலனாக மட்டுமே பிரித்து எழுத முடியும் என்று பொருள்.

பொதுவாக N என்ற பகு எண்ணை எடுத்துக் கொண்டால், நாம் N என்ற எண்ணை $N = p_1^{q_1} \times p_2^{q_2} \times p_3^{q_3} \times \cdots \times p_n^{q_n}$ என்ற ஒரே வழியில் மட்டுமே பிரித்து எழுத முடியும். இங்கு, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ ஆகியவை பகா எண்கள் மற்றும் $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ ஆகியவை இயல் எண்கள்.



படம் 2.2

முதலில் நாம் N என்ற எண்ணைக் காரணிப்படுத்த வேண்டும். ஒருவேளை N –யின் அனைத்துக் காரணிகளும் பகா எண்கள் எனில் நாம் இதோடு நிறுத்திக் கொள்ளலாம். அப்படியில்லையெனில் நாம் N –யின் காரணிகளில் உள்ள பகு எண்களைப் பகாக் காரணிகளாகப் பிரிக்க வேண்டும். அனைத்துக் காரணிகளும் பகாக் காரணிகளாகக் கிடைக்கும் வரை தொடர வேண்டும்.

சிந்தனைக் களம்

1 என்பது பகா எண்ணா?

விளக்கம்:

எடுத்துக்காட்டாக, 32760 என்ற எண்ணைக் காரணிப்படுத்த நாம் பெறுவது

$$32760 = 2\times2\times2\times3\times3\times5\times7\times13$$
$$= 2^3\times3^2\times5^1\times7^1\times13^1$$

எந்தெந்த வழிகளில் 32760ஐ காரணிப்படுத்தினாலும் முடிவில் நாம் பெறுவது மூன்று 2, இரண்டு 3, ஒரு 5, ஒரு 7 மற்றும் ஒரு 13 ஆகும்.

இதிலிருந்து நாம் பெறுவது "ஒவ்வொரு பகு எண்ணும் தனித்த பகா எண்களின் அடுக்குகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுத இயலும்" இதுவே **அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம்** என அழைக்கப்படுகிறது.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. ________ ஐத் தவிர்த்த மற்ற அனைத்து இயல் எண்களையும்__________–யின் பெருக்கற்பலனாக எழுத இயலும்.
2. ஒரு பகு எண்ணை எத்தனை வழிகளில் பகா எண்களின் அடுக்குகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுத இயலும்?
3. எந்தவொரு பகா எண்ணிற்கும் உள்ள வகுத்திகளின் எண்ணிக்கை_______.

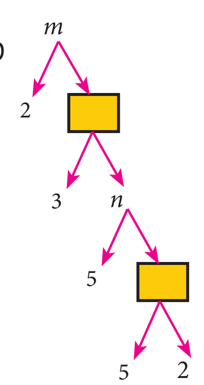
2.4.1 அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தின் முக்கியத்துவம் (Significance of the Fundamental Theorem of Arithmetic)

1–ஐ தவிர்த்து மற்ற இயல் எண்களுக்கான மேலே சொல்லப்பட்ட அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம், கணிதத்திலும் மற்ற துறைகளிலும் எண்ணற்ற பயன்பாடுகளைக் கொண்டுள்ளது. இத்தேற்றம் அனைத்து மிகை முழுக்களையும் உருவாக்கும் அடிப்படைக் கட்டமைப்பாகப் பகா எண்கள் விளங்குவதால் கணிதத்தில் இதன் பயன்பாடு அளவற்றது. ஆகவே, பகா எண்களானது ஒரு மூலக்கூறை உருவாக்கும் அணுக்களோடு ஒப்பிடப்படுகிறது.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

1. ab ஐ p என்ற பகா எண் வகுக்கும் எனில், p ஆனது a ஐ வகுக்கும் அல்லது p ஆனது b ஐ வகுக்கும். அதாவது p ஆனது a,b -ல் ஏதேனும் ஒன்றை வகுக்கும்.
2. ab ஐ n என்ற பகு எண் வகுக்கும் எனில், n ஆனது a –யையும் வகுக்க வேண்டியதில்லை b ஐயும் வகுக்க வேண்டியதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, 6 ஆனது 4×3 ஐ வகுக்கும். ஆனால் 6 ஆனது 4 ஐயும் வகுக்காது 3 ஐயும் வகுக்காது.

எடுத்துக்காட்டு 2.7 கொடுக்கப்பட்ட காரணி பிரித்தலில், m மற்றும் n என்ற எண்களைக் காண்க.



படம் 2.3

தீர்வு கீழிருந்து முதல் பெட்டியின் மதிப்பு $= 5\times2 = 10$

n –யின் மதிப்பு $= 5\times10 = 50$

கீழிருந்து இரண்டாம் பெட்டியின் மதிப்பு $= 3\times50 = 150$

m –யின் மதிப்பு $= 2\times150 = 300$

ஆகவே, தேவையான எண்கள் $m = 300,\ n = 50$

X_Ch 2 TM.indd 45 07-02-2020 05:31:39 PM

எடுத்துக்காட்டு 2.8 6^n ஆனது, n ஓர் இயல் எண் என்ற வடிவில் அமையும் எண்கள் 5 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியுமா? உனது விடைக்குக் காரணம் கூறுக.

தீர்வு $6^n = (2\times 3)^n = 2^n \times 3^n$ என்பதால்,

2 என்பது 6^n –யின் ஒரு காரணியாகும்.

எனவே, 6^n ஓர் இரட்டைப்படை எண் ஆகும். ஆனால், கடைசி இலக்கம் 5 –யில் முடியும் எண்கள் அனைத்தும் ஒற்றைப்படை எண்கள் ஆகும்.

ஆகவே, 6^n –யின் கடைசி இலக்கம் 5 என முடிய வாய்ப்பில்லை.

முன்னேற்றச் சோதனை

m ஆனது n ஐ வகுக்கும் எனில் m மற்றும் n–யின் மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம ______ மற்றும் _____ ஆகும்.

1. 2^m மற்றும் 3^n என்ற வடிவில் அமையும் எண்களின் மீ.பொ.வ ______.

எடுத்துக்காட்டு 2.9 $7\times5\times3\times2+3$ என்பது ஒரு பகு எண்ணா? உனது விடையை நியாயப்படுத்துக.

தீர்வு ஆம். கொடுக்கப்பட்ட எண் ஒரு பகு எண்ணாகும், ஏனெனில்,

$$7\times5\times3\times2+3 = 3\times\left(7\times5\times2+1\right) = 3\times71$$

கொடுக்கப்பட்ட எண்ணானது இரு பகா எண்களின் பெருக்கற்பலனாகக் காரணிப்படுத்தப்படுவதால், அது ஒரு பகு எண்ணாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.10 $a^b \times b^a = 800$ என்றவாறு அமையும் இரு மிகை முழுக்கள் 'a' மற்றும் 'b' ஐ காண்க.

தீர்வு 800 என்ற எண்ணைக் காரணிப்படுத்தும்போது, நாம் பெறுவது

$$800 = 2\times2\times2\times2\times2\times5\times5 = 2^5\times5^2$$

ஆகவே, $a^b \times b^a = 2^5\times5^2$

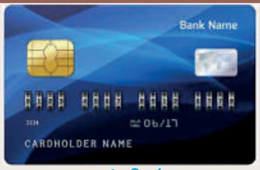
இதிலிருந்து நாம் பெறுவது. $a=2$, $b=5$ (அ) $a=5$, $b=2$.

சிந்தனைக் களம்

$a^b = b^a$ எனுமாறு அமையும் மிகை முழுக்கள் a, b –ஐ க்காண இயலுமா?

செயல்பாடு 3

$p^2\times q^1\times r^4\times s^3 = 3{,}15{,}000$ என்றவாறு அமையும் '$pqrs$' என்ற நான்கு இலக்கப் பணப்பரிவர்த்தனை அட்டையின் இரகசிய எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க இயலுமா?



படம் 2.4

பயிற்சி 2.2

1. n ஓர் இயல் எண் எனில், எந்த n மதிப்புகளுக்கு 4^n ஆனது 6 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியும்?
2. m மற்றும் n இயல் எண்கள் எனில், எந்த m–யின் மதிப்புகளுக்கு $2^n\times5^m$ என்ற எண் 5 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியும்?
3. 252525 மற்றும் 363636 என்ற எண்களின் மீ.பொ.வ காண்க.
4. $13824 = 2^a\times3^b$ எனில், a மற்றும் b –யின் மதிப்புக் காண்க.
5. $p_1^{x_1}\times p_2^{x_2}\times p_3^{x_3}\times p_4^{x_4} = 113400$ இங்கு, p_1, p_2, p_3, p_4 என்பன ஏறு வரிசையில் அமைந்த பகா எண்கள் மற்றும் x_1, x_2, x_3, x_4 என்பன முழுக்கள் எனில், p_1, p_2, p_3, p_4 மற்றும் x_1, x_2, x_3, x_4 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

6. அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி 408 மற்றும் 170 என்ற எண்களின் மீ.பொ.ம மற்றும் மீ.பொ.வ காண்க.
7. $24, 15, 36$ ஆகிய எண்களால் மீதியின்றி வகுபடும் மிகப்பெரிய ஆறிலக்க எண்ணைக் காண்க.
8. $35, 56$ மற்றும் 91 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 7 ஐத் தரக்கூடிய மிகச்சிறிய எண் எது?
9. முதல் 10 இயல் எண்களால் மீதியின்றி வகுபடக்கூடிய சிறிய எண் எது?

2.5 மட்டு எண்கணிதம் (Modular Arithmetic)

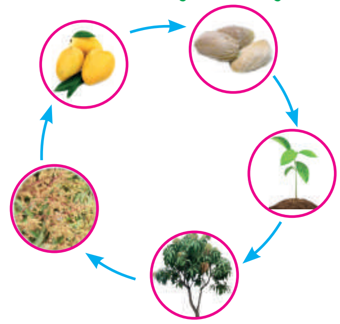
படம் 2.5

கடிகாரத்தில் 24 மணி நேரத்தைக் குறிக்க நாம் 1 முதல் 12 வரை உள்ள எண்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். ஒரு நாளின் 24 மணிநேரத்தை எவ்வாறு ஒரு 12 மணி நேர எண் அமைப்பில் குறிக்க இயலும்? நாம் $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ மற்றும் 12 க்கு பிறகு மீண்டும் $1, 2, 3, \ldots$ எனத் தொடங்குகிறோம். இந்த அமைப்பில் நேரமானது 1 முதல் 12 வரை சுழன்று கொண்டே உள்ளன. இது போல ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பை அடைந்தவுடன் மீண்டும் ஒரே எண்களைத் தொடர்ந்து பெறுவது **மட்டு எண்கணிதம்** ஆகும்.

கணிதத்தில் மட்டு எண்கணிதம் என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைச் சுற்றி மீண்டும் இடம் பெறும் முழுக்களின் அமைப்பு ஆகும். இயல்பான எண்கணிதம் போன்றில்லாமல் மட்டு எண் கணிதம் சுழற்சி அடிப்படையில் செயல்படுகிறது. 'மட்டு எண்கணிதம்' என்ற கருத்தை உருவாக்கியவர் மாபெரும் ஜெர்மானியக் கணித மேதை **கார்ல் பிரடெரிக் காஸ்** ஆவார். இவர் **"கணித மேதைகளின் இளவரசர்"** என அழைக்கப்படுகிறார்.

உதாரணங்கள்

1. பகல் மற்றும் இரவு தொடர்ந்து மாறிக்கொண்டே இருக்கும்.
2. ஒரு வாரத்தின் நாட்கள் ஞாயிறு முதல் சனி வரை தொடர்ச்சியாக மாறிக் கொண்டே இருக்கும்.
3. தாவரங்களின் வளர்ச்சி மாற்றம்.
4. ஒரு வருடத்தின் காலநிலை தொடர்ந்து மாறிக்கொண்டே இருக்கும் (கோடைக்காலம், மழைக்காலம், குளிர்காலம், வசந்தகாலம்).
5. இரயில்வே மற்றும் விமான நேரங்கள் 24 மணி நேரச் சுழற்சி அடிப்படையில் உள்ளன. இரயில்வே நேரம் 00.00–யில் தொடங்குகிறது. $23{:}59$ –ஐ அடைந்தவுடன், அடுத்த நிமிடம் $24{:}00$ என்பதற்குப் பதிலாக $00{:}00$ என மாறுகிறது.



படம் 2.6

2.5.1 மட்டு ஒருங்கிசைவு (Congruence Modulo)

a மற்றும் b –க்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் n –யின் மடங்கு எனில் மட்டு n –யின் அடிப்படையில் a யும் b யும் ஒருங்கிசைவு உடையதாகும். அதாவது $a - b = kn$ $k \in \mathbb{Z}$ இதை $a \equiv b$ (மட்டு n) எனவும் எழுதலாம்.

இங்கு n என்பது மட்டு எண் என அழைக்கப்படுகிறது. வேறு விதமாகச் சொல்வோமேயானால் $a \equiv b$ (மட்டு n) என்பதன் பொருள் $a - b$ ஆனது n ஆல் வகுபடும் எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $61 \equiv 5$ (மட்டு 7) ஏனெனில், $61 - 5 = 56$ என்பது 7 ஆல் வகுபடும்.

P3XKAU

குறிப்பு

- ஒரு மிகை முழுவை n ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிகள் $0, 1, 2, \ldots, n-1$ ஆகும்.
- எனவே மட்டு n ஐ கணக்கிடும் போது, நாம் அனைத்து எண்களையும் n ஆல் வகுத்துக் கிடைக்கும் மீதிகளான $0,1,2,3,\ldots,\ n-1$ ஆல் பதிலிட வேண்டும்.

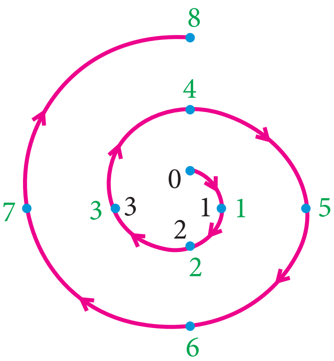
மட்டு ஒருங்கிசைவை தெளிவாகப் புரிந்து கொள்வதற்காக மேலும் இரு விளக்கங்களைக் காண்போம்.

விளக்கம் 1

8 (மட்டு 4) காண்க

மட்டு 4 காண்பதற்கு(சாத்தியமான மீதிகள் $0,\ 1,\ 2,\ 3$ என்பதால்) $0,1,2,3$ என்ற எண்களைக் கொண்டு கடிகாரம் போன்ற அமைப்பை உருவாக்குவோம். பூச்சியத்தில் தொடங்கிக் கடிகார முள்ளின் திசையில் 8 எண்கள் $1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0$ என்றவாறு நகர வேண்டும். 8 எண்கள் சுழற்சியாக நகர்ந்த பிறகு நாம் 0 என்ற எண்ணில் முடிக்கிறோம்.

எனவே, $8 \equiv 0$ (மட்டு 4)



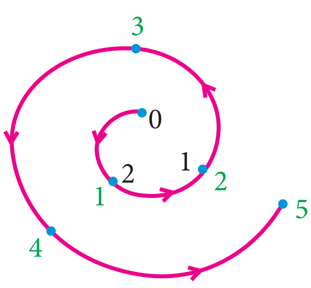
படம் 2.7

விளக்கம் 2

-5 (மட்டு 3) காண்க

மட்டு 3 காண்பதற்கு (சாத்தியமான மீதிகள் $0,\ 1,\ 2$ என்பதால்) $0,\ 1,\ 2$ என்ற எண்களைக் கொண்டு கடிகாரம் போன்ற அமைப்பை உருவாக்குவோம். குறை எண் என்பதால் பூச்சியத்தில் தொடங்கிக் கடிகார முள்ளின் எதிர்திசையில் 5 எண்கள் $2, 1, 0, 2, 1$ என்றவாறு நகர வேண்டும். 5 எண்கள் கடிகார முள்ளின் எதிர்திசையில் சுழற்சியாக நகர்ந்த பிறகு நாம் 1 என்ற எண்ணில் முடிக்கிறோம்.

எனவே, $-5 \equiv 1$ (மட்டு 3)



படம் 2.8

2.5.2 யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தை மட்டு எண் கணிதத்துடன் தொடர்புபடுத்துதல் (Connecting Euclid's Division lemma and Modular Arithmetic)

m மற்றும் n என்பன இரு முழுக்கள் மற்றும் m ஒரு மிகை முழு என்க. யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின்படி $n = mq + r$ இங்கு $0 \leq r < m$ மற்றும் q ஒரு முழு என நாம் எழுதலாம். $n = mq + r$ என ஒவ்வொரு முறையும் எழுதுவதற்குப் பதிலாக, நாம் மட்டு ஒருங்கிசைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்திப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$n = mq + r$ q ஒரு முழு எனில் n ஆனது மட்டு m–ஐப் பொறுத்து r உடன் ஒருங்கிசைவாக உள்ளது என நாம் கூறலாம்.

$$\begin{aligned} n &= mq + r \\ n - r &= mq \\ n - r &\equiv 0 \text{ (மட்டு } m) \\ n &\equiv r \text{ (மட்டு } m) \end{aligned}$$

ஆகவே யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின் மூலம் பெறப்பட்ட $n = mq + r$ என்ற சமன்பாட்டை $n \equiv r$ (மட்டு m) என்ற மட்டு ஒருங்கிசைவாக எழுதலாம்.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. ____________ எனில் மட்டு n அடிப்படையில் a–யும் b–யும் ஒருங்கிசைவு உடையதாகும்.
2. 7 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 5 தரக்கூடிய அனைத்து மிகை முழுக்களின் கணம் ____________.

குறிப்பு

a மற்றும் b என்ற இரு முழுக்களும் மட்டு m ஐப் பொறுத்து ஒருங்கிசைவாக அமைய, அதாவது $a \equiv b$ (மட்டு m), என எழுத வேண்டுமானால் அவ்விரு எண்களையும் m ஆல் வகுக்கும்போது ஒரே மீதியைத் தர வேண்டும்.

சிந்தனைக் களம்

3 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 2 கிடைக்கக்கூடிய வகையில் எத்தனை முழுக்கள் இருக்கும்?

2.5.3 மட்டு எண்கணிதச் செயல்பாடுகள் (Modulo operations)

எண்கள் மீதான அடிப்படைச் செயல்பாடுகளான கூட்டல், கழித்தல் மற்றும் பெருக்கல் போன்று மட்டு எண்கணிதத்திலும் அதே செயல்பாடுகளை நாம் செய்யலாம். இச்செயல்பாடுகளைச் செய்வதற்குத் தேவையான கருத்துகளைப் பின்வரும் தேற்றம் வழங்குகிறது.

தேற்றம் 5

$a,\ b,\ c$ மற்றும் d என்பன முழுக்கள் மற்றும் m என்பது ஒரு மிகை முழு. $a \equiv b$ (மட்டு m) மற்றும் $c \equiv d$ (மட்டு m) எனில்,

(i) $(a+c) \equiv (b+d)$ (மட்டு m) (ii) $(a-c) \equiv (b-d)$ (மட்டு m)

(iii) $(a \times c) \equiv (b \times d)$ (மட்டு m)

விளக்கம் 3

$17 \equiv 4$ (மட்டு 13) மற்றும் $42 \equiv 3$ (மட்டு 13) எனில், தேற்றம் 5–ன் படி,

(i) $17+42 \equiv 4+3$ (மட்டு 13)
$59 \equiv 7$ (மட்டு 13)

(ii) $17-42 \equiv 4-3$ (மட்டு 13)
$-25 \equiv 1$ (மட்டு 13)

(iii) $17 \times 42 \equiv 4 \times 3$ (மட்டு 13)
$714 \equiv 12$ (மட்டு 13)

தேற்றம் 6

$a \equiv b$ (மட்டு m) எனில்,

(i) $ac \equiv bc$ (மட்டு m) (ii) $a \pm c \equiv b \pm c$ (மட்டு m) இங்கு c என்பது ஏதேனும் ஒரு முழுக்கள்

முன்னேற்றச் சோதனை

1. $(k-3) \equiv 5$ (மட்டு11) என்றவாறு அமையும் k என்ற மிகை எண்கள் __________.
2. $59 \equiv 3$ (மட்டு 7), $46 \equiv 4$ (மட்டு 7) எனில், $105 \equiv$ ________ (மட்டு 7), $13 \equiv$ ________ (மட்டு 7), $413 \equiv$ ________ (மட்டு 7), $368 \equiv$ ________ (மட்டு 7).
3. $7 \times 13 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31$ என்ற எண்ணை 6 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி __________.

எடுத்துக்காட்டு 2.11 70004 மற்றும் 778 ஆகிய எண்களை 7 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு 70000 ஆனது 7 ஆல் வகுபடும் என்பதால்

$$70000 \equiv 0 \text{ (மட்டு 7)}$$
$$70000+4 \equiv 0+4 \text{ (மட்டு 7)}$$
$$70004 \equiv 4 \text{ (மட்டு 7)}$$

எனவே 70004 ஐ 7 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 4.

777 ஆனது 7 ஆல் வகுபடும் என்பதால்

$$\begin{aligned} 777 &\equiv 0\ (\text{மட்டு } 7) \\ 777+1 &\equiv 0+1\ (\text{மட்டு } 7) \\ 778 &\equiv 1\ (\text{மட்டு } 7) \end{aligned}$$

எனவே, 778 ஐ 7 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி 1.

எடுத்துக்காட்டு 2.12 $15 \equiv 3$ (மட்டு d) என்றவாறு அமையும் d –யின் மதிப்பைத் தீர்மானிக்க.

தீர்வு $15 \equiv 3$ (மட்டு d) என்பதன் பொருள் $15 - 3 = kd$, இங்கு k என்பது ஏதேனும் ஒரு முழுக்கள்.

$12 = kd.$

d ஆனது 12 ஐ வகுக்கும்.

12 –யின் வகுத்திகளாவன $1,2,3,4,6,12$.

d ஆனது 3 ஐ விட அதிகமாக இருக்க வேண்டும், ஏனெனில் மீதி 3 வந்துள்ளது. எனவே, d– க்கு சாதகமான மதிப்புகள் $4,6,12$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.13 பின்வருவனவற்றிற்குப் பொருந்தக்கூடிய குறைந்தபட்ச மிகை x-ஐக் காண்க.

(i) $67 + x \equiv 1$ (மட்டு 4) (ii) $98 \equiv \left(x+4\right)$ (மட்டு 5)

தீர்வு (i) $67 + x \equiv 1$ (மட்டு 4)

$67 + x - 1 = 4n$, இங்கு n என்பது ஏதேனும் ஒரு முழுக்கள்

$66 + x = 4n$

$66 + x$ என்பது 4 –யின் மடங்கு.

66 ஐ விட அதிகமான 4 –யின் மடங்கு 68. எனவே x–யின் குறைந்தபட்ச மதிப்பு 2 ஆகும்.

(ii) $98 \equiv (x+4)$ (மட்டு 5)

$98 - (x+4) = 5n$, n என்பது ஏதேனும் ஒரு முழுக்கள்

$94 - x = 5n$

$94 - x$ என்பது 5 –யின் மடங்கு

94 ஐ விடக் குறைவான 5 –யின் மடங்கு 90. எனவே x– யின் குறைந்தபட்ச மதிப்பு 4 ஆகும்.

குறிப்பு

இயற்கணிதத்தில் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்போது பெரும்பாலும் நமக்கு முடிவுறு எண்ணிக்கையிலான தீர்வுகள் கிடைக்கும். ஆனால், மட்டு ஒருங்கிசைவு சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்போது நமக்கு எண்ணற்றத் தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.14 தீர்க்க $8x \equiv 1$ (மட்டு 11)

தீர்வு $8x \equiv 1$ (மட்டு 11) என்பதை $8x - 1 = 11k$, இங்கு k என்பது ஏதேனும் ஒரு முழுக்கள், என எழுதலாம்.

$$x = \frac{11k+1}{8}$$

X_Ch 2 TM.indd 50 07-02-2020 05:31:47 PM

$k = 5, 13, 21, 29,\ldots$ என நாம் பிரதியிடும் போது $11k{+}1$ ஆனது 8 ஆல் வகுபடுகிறது.

$$x = \frac{11\times 5+1}{8} = 7$$
$$x = \frac{11\times 13+1}{8} = 18$$

$\therefore$ $7,18,29,40,$ ... என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.15 $10^4 \equiv x$ (மட்டு 19) என்றவாறு அமையும் x மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு $10^2 = 100 \equiv 5$ (மட்டு 19)

$10^4 = (10^2)^2 \equiv 5^2$ (மட்டு 19)

$10^4 \equiv 25$ (மட்டு 19)

$10^4 \equiv 6$ (மட்டு 19) (ஏனெனில், $25{\equiv}6$ (மட்டு 19))

எனவே, $x = 6$.

எடுத்துக்காட்டு 2.16 $3x \equiv 1$ (மட்டு 15) என்ற சமன்பாட்டிற்கு எத்தனை முழு எண் தீர்வுகள் உள்ளன எனக் காண்க.

தீர்வு $3x \equiv 1$ (மட்டு 15) என்பதை

$3x - 1 = 15k$, k என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு என எழுதலாம்.

$$3x = 15k + 1$$
$$x = \frac{15k+1}{3}$$
$$x = 5k + \frac{1}{3}$$

$5k$ என்பது ஒரு முழு எண் என்பதால், $5k + \frac{1}{3}$ என்பது ஒரு முழு எண் அல்ல. எனவே இச்சமன்பாட்டிற்கு முழு எண் தீர்வே இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 2.17 ஒருவர் சென்னையிலிருந்து டெல்லிக்குச் செல்ல இரயிலில் புறப்படுகிறார். அவர் தனது பயணத்தைப் புதன்கிழமை 22.30 மணிக்குத் தொடங்குகிறார். எந்தவிதத் தாமதமுமின்றி இரயில் செல்வதாகக் கொண்டால் மொத்தப் பயண நேரம் 32 மணி நேரம் ஆகும். அவர் எப்பொழுது டெல்லியைச் சென்றடைவார் ?

தீர்வு பயணம் தொடங்கும் நேரம் 22.30. பயண நேரம் 32 மணி நேரம் இங்கு நாம் மட்டு 24 ஐ பயன்படுத்த உள்ளோம்.

சென்று சேரும் நேரம்

$22.30{+}32$ (மட்டு 24) $\equiv 54.30$ (மட்டு 24)

$\equiv 6.30$ (மட்டு 24) (அதாவது $32 = \underbrace{(1\times 24)}_{\text{வியாழன்}} + \underbrace{8}_{\text{வெள்ளி}}$)

ஆகவே அவர் வெள்ளிக்கிழமை காலை 6.30 மணிக்கு டெல்லி சென்றடைவார்.

எடுத்துக்காட்டு 2.18 கலா மற்றும் வாணி இருவரும் நண்பர்கள். "இன்று எனது பிறந்தநாள்" எனக் கலா கூறினாள். வாணியிடம், "உனது பிறந்தநாளை எப்போது நீ கொண்டாடினாய்?" எனக் கேட்டாள். அதற்கு வாணி "இன்று திங்கள்கிழமை, நான் என்னுடைய பிறந்த நாளை 75 நாட்களுக்கு முன் கொண்டாடினேன்", எனப் பதிலளித்தாள். வாணியின் பிறந்தநாள் எந்தக் கிழமையில் வந்திருக்கும் எனக் காண்க.

தீர்வு நாம் இங்கு ஒவ்வொரு வார நாளுக்கும் ஓர் எண்ணைப் பின்வருமாறு எடுத்துக் கொள்வோம். $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ என்பன முறையே ஞாயிறு முதல் சனி வரை உள்ள கிழமைகளைக் குறிப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

வாணி இன்று திங்கள் கிழமை என்று கூறியதால், அதற்கான எண் 1. வாணியின் பிறந்தநாள் 75 நாட்களுக்கு முன் வருவதால் நாம் 1 –லிருந்து 75 ஐக் கழித்து மட்டு 7 காண வேண்டும், ஏனெனில் 1 வாரத்திற்கு 7 நாட்கள்.

$$-74 \ (\text{மட்டு } 7) \equiv -4 \ (\text{மட்டு } 7) \equiv 7-4 \ (\text{மட்டு } 7) \equiv 3 \ (\text{மட்டு } 7)$$

(ஏனெனில், $-74-3=-77$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடும்)

எனவே, $1-75 \equiv 3 \ (\text{மட்டு } 7)$

3 என்ற எண் புதன்கிழமையைக் குறிக்கும்.
எனவே, வாணி தனது பிறந்தநாளைப் புதன்கிழமை கொண்டாடியிருப்பாள்.

பயிற்சி 2.3

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யக்கூடிய குறைந்தபட்ச மிகை முழு x –ன் மதிப்பைக் காண்க.
   (i) $71 \equiv x \ (\text{மட்டு } 8)$ (ii) $78 + x \equiv 3 \ (\text{மட்டு } 5)$ (iii) $89 \equiv (x+3) \ (\text{மட்டு } 4)$
   (iv) $96 \equiv \dfrac{x}{7} \ (\text{மட்டு } 5)$ (v) $5x \equiv 4 \ (\text{மட்டு } 6)$
2. x ஆனது மட்டு 17 –யின் கீழ் 13 உடன் ஒருங்கிசைவாக உள்ளது எனில், $7x-3$ ஆனது எந்த எண்ணுடன் ஒருங்கிசைவாக இருக்கும்?
3. தீர்க்க $5x \equiv 4 \ (\text{மட்டு } 6)$
4. தீர்க்க $3x - 2 \equiv 0 \ (\text{மட்டு } 11)$
5. முற்பகல் 7 மணிக்கு 100 மணி நேரத்திற்குப் பிறகு நேரம் என்ன?
6. பிற்பகல் 11 மணிக்கு 15 மணி நேரத்திற்கு முன்பு நேரம் என்ன?
7. இன்று செவ்வாய் கிழமை, என்னுடைய மாமா 45 நாட்களுக்குப் பிறகு வருவதாகக் கூறியுள்ளார். என்னுடைய மாமா எந்தக் கிழமையில் வருவார்?
8. எந்த ஒரு மிகை முழு எண் n –றகும் $2^n + 6\times 9^n$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.
9. 2^{81} ஐ 17 ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதி காண்க.
10. பிரிட்டிஷ் ஏர்லைன்ஸ் விமானத்தில் சென்னையிலிருந்து லண்டன் செல்லப் பயணநேரம் தோராயமாக 11 மணிநேரம். விமானம் தனது பயணத்தை ஞாயிற்றுக்கிழமை $23{:}30$ மணிக்குத் தொடங்கியது. சென்னையின் திட்ட நேரமானது லண்டனின் திட்ட நேரத்தைவிட 4.30 மணி நேரம் முன்னதாக இருக்குமெனில், விமானம் லண்டனில் தரையிறங்கும் நேரத்தைக் காண்க.

DW69PL

2.6 தொடர் வரிசைகள் (Sequences)

பின்வரும் படங்களைக் கருதுக.

இந்தப் படங்களில் ஏதோ ஓர் அமைப்பு அல்லது வரிசைப்படுத்துதல் உள்ளது. முதல் படத்தில், முதல் வரிசையில் ஓர் ஆப்பிள், இரண்டாவது வரிசையில் இரண்டு ஆப்பிள்கள் மூன்றாவது வரிசையில் மூன்று

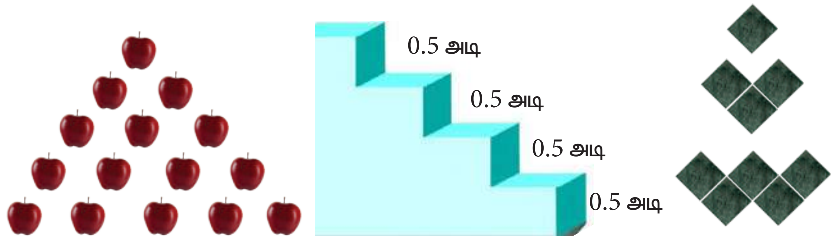


Fig.2.9

X_Ch 2 TM.indd 52 07-02-2020 05:31:51 PM

ஆப்பிள்கள் என்றவாறு அமைந்துள்ளன. ஒவ்வொரு வரிசையிலும் உள்ள ஆப்பிள்களின் எண்ணிக்கை $1, 2, 3, \ldots$

இரண்டாவது படத்தில் ஒவ்வொரு படியும் 0.5 அடி உயரம் கொண்டது. அடிமட்டத்திலிருந்து ஒவ்வொரு படியின் மொத்த உயரமானது 0.5 அடி, 1 அடி, 1.5 அடி, ... என உள்ளது. மூன்றாவது படத்தில் ஒவ்வொரு வடிவத்திலும் உள்ள சதுரங்களின் எண்ணிக்கை $1,3,5,\ldots$ என உள்ளது. இந்த மூன்று உதாரணங்கள் மூலம் பெறப்பட்ட எண்கள் "தொடர்வரிசை" என்ற வகையைச் சார்ந்தவை.

வரையறை

மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசை என்பது இயல் எண்களின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட, மெய்யெண் மதிப்புகளைப் பெறும் சார்பாகும்.

தொடர் வரிசையின் ஒவ்வொரு நிலையில் வரும் எண்ணும், தொடர்வரிசையின் ஓர் உறுப்பு எனப்படும். முதலில் வரும் உறுப்பு முதல் உறுப்பு எனவும் இரண்டாவதாக வரும் உறுப்பு இரண்டாம் உறுப்பு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

n–வது உறுப்பானது a_n என குறிக்கப்படும் எனில், a_1 என்பது முதல் உறுப்பு, a_2 என்பது இரண்டாம் உறுப்பு , ...

ஒரு தொடர்வரிசையை $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ என எழுதலாம்.

விளக்கம்

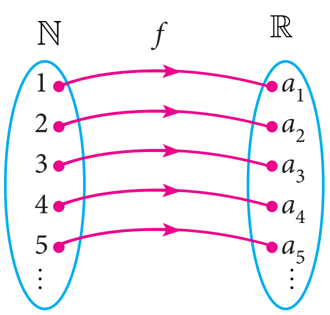
1. $1,3,5,7,\ldots$ என்ற தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பு $a_n = 2n-1$, $n = 1,2,3,\ldots,$ எனப் பிரதியிடும்போது நாம் பெறுவது, $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7,\ldots$
2. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ என்ற தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பு $a_n = \frac{1}{n+1}$. $n = 1,2,3,\ldots$. எனப் பிரதியிடும்போது நாம் பெறுவது, $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{3},\ a_3 = \frac{1}{4},\ a_4 = \frac{1}{5},\ldots$

ஒரு தொடர்வரிசை முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால் அது முடிவுறு தொடர்வரிசை எனப்படும். ஒரு தொடர்வரிசையில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் இருப்பின் அது முடிவுறாத் தொடர்வரிசை எனப்படும்.

தொடர்வரிசையை ஒரு சார்பாக அறிதல்

தொடர்வரிசையானது இயல் எண்களின் $\mathbb{N}$ மீது வரையறை செய்யப்பட்ட ஒரு சார்பாகும். குறிப்பாகத் தொடர்வரிசை ஆனது $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, இங்கு $\mathbb{R}$ என்பது மெய்யெண்களின் கணம் என வரையறை செய்யப்பட்ட சார்பாகும்.

தொடர்வரிசையானது $a_1, a_2, a_3, \ldots$ வடிவில் அமையுமானால், $a_1, a_2, a_3, \ldots$ என்றத் தொடர்வரிசைக்கு $f(k) = a_k$, $k = 1,2,3,\ldots$ என்ற சார்பைத் தொடர்புபடுத்தலாம்.



படம் 2.10

குறிப்பு

எல்லாத் தொடர்வரிசைகளும் சார்புகளே ஆனால் எல்லாச் சார்புகளும் தொடர்வரிசை ஆகாது.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளில் கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக.
   (i) 7, 13, 19, ______ , ... (ii) 2, ______, 10, 17, 26,... (iii) 1000, 100, 10, 1, ______, ...
2. தொடர்வரிசையானது ______ கணத்தில் வரையறை செய்யப்பட்ட சார்பாகும்.
3. 0,2,6,12,20,... என்ற தொடர்வரிசையின் n –வது உறுப்பு ______.
4. சரியா, தவறா எனக் கூறுக.
   (i) எல்லாத் தொடர்வரிசைகளும் சார்புகளாகும்
   (ii) எல்லாச் சார்புகளும் தொடர்வரிசைகளாகும்

எடுத்துக்காட்டு 2.19 பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் அடுத்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

(i) $\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{10},\frac{1}{14},....$ (ii) $5,\ 2,-1,-4,....$ (iii) $1,0.1,0.01,...$

தீர்வு (i) $\frac{1}{2} \xrightarrow{+4} \frac{1}{6} \xrightarrow{+4} \frac{1}{10} \xrightarrow{+4} \frac{1}{14}, \ \ldots$

மேற்கண்ட தொடர்வரிசையில் தொகுதி ஒரே எண்ணாக உள்ளது மற்றும் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் பகுதியானது 4 அதிகரிக்கிறது.

எனவே அடுத்த மூன்று உறுப்புகளானது

$$a_5 = \frac{1}{14+4} = \frac{1}{18}$$

$$a_6 = \frac{1}{18+4} = \frac{1}{22}$$

$$a_7 = \frac{1}{22+4} = \frac{1}{26}$$

(ii) $5, \xrightarrow{-3} 2, \xrightarrow{-3} -1, \xrightarrow{-3} -4, \ldots$

இங்கு ஒவ்வோர் உறுப்பும் முந்தைய உறுப்பைவிட 3 குறைவாக உள்ளது.
எனவே அடுத்த மூன்று உறுப்புகள் $-7,\ -10,\ -13$.

(iii) $1, \xrightarrow{\div 10} 0.1, \xrightarrow{\div 10} 0.01, \ldots$

இங்கு ஒவ்வோர் உறுப்பும் முந்தைய உறுப்பை 10 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கிறது.
எனவே அடுத்த மூன்று உறுப்புகள்

$$a_4 = \frac{0.01}{10} = 0.001$$

$$a_5 = \frac{0.001}{10} = 0.0001$$

$$a_6 = \frac{0.0001}{10} = 0.00001$$

எடுத்துக்காட்டு 2.20 பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் பொது உறுப்பு காண்க.

(i) $3,6,9,...$ (ii) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},...$ (iii) $5,-25,125,...$

X_Ch 2 TM.indd 54 07-02-2020 05:31:54 PM

தீர்வு (i) $3, 6, 9, \ldots$

இங்குள்ள உறுப்புகள் 3 –யின் மடங்குகளாக உள்ளன. எனவே $a_n = 3n,\ n \in \mathbb{N}$

(ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

$$a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{2}{3};\ a_3 = \frac{3}{4}$$

இங்கு ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் தொகுதியானது வரிசை இயல் எண்களாகவும், பகுதியானது தொகுதியைவிட ஒன்றுகூடுதலாகவும் உள்ளது. எனவே, பொது உறுப்பு $a_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$

(iii) $5, -25, 125, \ldots$

இங்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளில் $+$ மற்றும் $-$ எனக் குறிகள் மாறி மாறி வந்துள்ளன. மேலும் உறுப்புகள் 5 –யின் அடுக்குகளாகவும் அமைந்துள்ளன. எனவே பொது உறுப்பு $a_n = (-1)^{n+1} 5^n, n \in \mathbb{N}$

எடுத்துக்காட்டு 2.21 ஒரு தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$a_n = \begin{cases} n(n+3);\ n \in \mathbb{N} \text{ ஓர் ஒற்றை எண்} \\ n^2 + 1 \quad ;\ n \in \mathbb{N} \text{ ஓர் இரட்டை எண்} \end{cases}$$

11 –வது உறுப்பு மற்றும் 18 –வது உறுப்புக் காண்க.

தீர்வு n=11 என்பது ஒற்றை எண் என்பதால், a_{11} –யின் மதிப்புக் காண $n = 11$ என

$$a_n = n(n+3) \text{ –யில் பிரதியிட,}$$

11 –வது உறுப்பு $\quad a_{11} = 11(11+3) = 154$.

$n = 18$ என்பது இரட்டை எண் என்பதால், a_{18} –யின் மதிப்புக் காண $n = 18$ என

$$a_n = n^2 + 1 \text{ –யில் பிரதியிட,}$$

18 –வது உறுப்பு $\quad a_{18} = 18^2 + 1 = 325.$

எடுத்துக்காட்டு 2.22 பின்வரும் தொடர்வரிசையின் முதல் ஐந்து உறுப்புகளைக் காண்க.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2} + 3};\ n \geq 3,\ n \in \mathbb{N}$$

தீர்வு $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ எனத் தொடர்வரிசையின் முதல் இரண்டு உறுப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மூன்றாவது உறுப்பானது முதல் இரண்டு உறுப்புகளைச் சார்ந்தே உள்ளது.

$$a_3 = \frac{a_{3-1}}{a_{3-2} + 3} = \frac{a_2}{a_1 + 3} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

இதைப் போலவே நான்காம் உறுப்பு a_4 ஆனது a_2 மற்றும் a_3 ஆகியவற்றைச் சார்ந்தே உள்ளது.

$$a_4 = \frac{a_{4-1}}{a_{4-2} + 3} = \frac{a_3}{a_2 + 3} = \frac{\frac{1}{4}}{1+3} = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

இதே வழிமுறையில் ஐந்தாம் உறுப்பு a_5 கணக்கிடப்படுகிறது.

$$a_5 = \frac{a_{5-1}}{a_{5-2} + 3} = \frac{a_4}{a_3 + 3} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4} + 3} = \frac{1}{16} \times \frac{4}{13} = \frac{1}{52}$$

எனவே, தொடர்வரிசையின் முதல் ஐந்து உறுப்புகள் $1,\ 1,\ \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$ மற்றும் $\frac{1}{52}$ ஆகும்.

பயிற்சி 2.4

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் அடுத்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

   (i) $8, 24, 72, \ldots$ (ii) $5, 1, -3, \ldots$ (iii) $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \ldots$

2. பின்வரும் n–வது உறுப்புகளைக் கொண்ட தொடர்வரிசைகளின் முதல் நான்கு உறுப்புகளைக் காண்க.

   (i) $a_n = n^3 - 2$ (ii) $a_n = (-1)^{n+1} n(n+1)$ (iii) $a_n = 2n^2 - 6$

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்வரிசைகளின் n –வது உறுப்பைக் காண்க.

   (i) $2, 5, 10, 17, \ldots$ (ii) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$ (iii) $3, 8, 13, 18, \ldots$

4. கீழ்க்கண்ட தொடர்வரிசைகள் ஒவ்வொன்றிலும் n–வது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள உறுப்புகளைக் காண்க.

   (i) $a_n = \frac{5n}{n+2}$; a_6 மற்றும் a_{13} (ii) $a_n = -(n^2-4)$; a_4 மற்றும் a_{11}

5. $a_n = \begin{cases} \frac{n^2-1}{n+3} & ;\text{ ஓர் இரட்டை எண் } n \in \mathbb{N} \\ \frac{n^2}{2n+1} & ;\text{ ஓர் ஒற்றை எண் } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ என்பது n -வது உறுப்பு எனில், a_8 மற்றும் a_{15} காண்க.

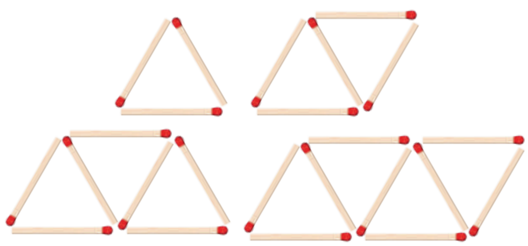
6. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ மற்றும் $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ எனில், தொடர்வரிசையின் முதல் ஆறு உறுப்புகளைக் காண்க.

2.7 கூட்டுத்தொடர் வரிசை (Arithmetic Progression)

பின்வரும் இரண்டு விளக்கங்களைக் கொண்டு தொடங்குவோம்.

விளக்கம் 1

படத்தில் காணும் வடிவங்களைத் தீக்குச்சிகள் கொண்டு உருவாக்குவோம்.



படம் 2.11

(i) ஒவ்வொரு வடிவத்தையும் உருவாக்குவதற்கு எத்தனை தீக்குச்சிகள் தேவைப்படுகின்றன? $3, 5, 7$ மற்றும் 9.

(ii) இதில், அடுத்தடுத்த உறுப்புகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் காண இயலுமா ? எவ்வளவு? $5 - 3 = 7 - 5 = 9 - 7 = 2$

எனவே, அடுத்தடுத்த உறுப்புகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் எப்போதும் 2 ஆக இருப்பதைக் காண்க.

விளக்கம் 2

ஒருவருக்கு வேலை கிடைக்கிறது. அவருடைய முதல் மாதச் சம்பளம் ₹$10,000$ எனவும், ஆண்டு ஊதிய உயர்வு ₹2000 எனவும் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது, அவருடைய முதல், இரண்டாம், மூன்றாம் வருட ஊதியம் முறையே ₹10000, ₹12000, ₹14000 .

அடுத்தடுத்த வருடங்களின் ஊதிய வித்தியாசம் கண்டறியும்போது நாம் பெறுவது $12000 - 10000 = 2000$; $14000 - 12000 = 2000$. ஆகவே அடுத்தடுத்த எண்களின் (ஊதியங்களின்) வித்தியாசம் எப்போதும் 2000.

மேற்கண்ட இரு விளக்கங்களின் பின்னால் மறைந்துள்ள பொதுப் பண்பை உற்று நோக்கினீர்களா? இரண்டிலும் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் எப்போதும் மாறிலியாக உள்ளது. மேலும் முதல் உறுப்பைத் தவிர மற்ற உறுப்புகள், அதற்கு முந்தைய உறுப்புடன் ஒரு மாறாத எண்ணை (மேலே கொடுக்கப்பட்ட விளக்கங்கள் 1 மற்றும் 2 மூலம் $2, 2000$) கூட்டுவதன் மூலம் கிடைக்கிறது. இந்த மாறாத எண்ணான அடுத்தடுத்த உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசமானது, பொது வித்தியாசம் என அழைக்கப்படுகிறது.

வரையறை

a மற்றும் d என்பன மெய்யெண்கள் எனில், $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d, \ldots$ என்ற வடிவில் அமையும் எண்கள் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்கும். கூட்டுத் தொடர்வரிசையைச் சுருக்கமாக A.P. (Arithmetic Progression) எனக் குறிப்பிடுகிறோம். இங்கு 'a' என்ற எண்ணை முதல் உறுப்பு (first term) என்றும் 'd' என்ற எண்ணை பொது வித்தியாசம் (common difference) என்றும் அழைக்கிறோம்.

எளிமையாகக் கூற வேண்டுமானால் கூட்டுத் தொடர்வரிசை என்பது அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் ஒரு மாறிலி அளவில் வேறுபடும் தொடர்வரிசையாகும். உதாரணமாக இரட்டை முழு எண்களின் தொகுப்பு $2, 4, 6, 8, 10, 12,\ldots$ என்பது முதல் உறுப்பு $a = 2$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d = 2$ உள்ள ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையாகும். ஏனெனில், அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசம் சமம் $4 - 2 = 2,\ 6 - 4 = 2,\ 8 - 6 = 2\ldots$

பெரும்பாலான நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழல்கள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைகின்றன.

குறிப்பு

- கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் எந்த இரு தொடர்ச்சியான உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் மாறாத எண்ணாக இருக்கும். இந்த மாறாத எண் "பொது வித்தியாசம்" என அழைக்கப்படுகிறது.
- ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது முடிவுறு கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனப்படும். ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது முடிவுறா கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனப்படும்.

2.7.1 ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் உறுப்புகள் மற்றும் பொது வித்தியாசம் (Terms and Common Difference of an A.P.)

1. ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் உறுப்புகளைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

   $t_1 = a = a + (1-1)d\,, \quad t_2 = a + d = a + (2-1)d\,, \quad t_3 = a + 2d = a + (3-1)d\,,$
   $t_4 = a + 3d = a + (4-1)d\,, \ldots$

பொதுவாக t_n எனக் குறிக்கப்படும் n–வது உறுப்பானது $t_n = a + (n-1)d$ என எழுதப்படுகிறது.

ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n வது உறுப்பு t_n எனில், $t_n = a + (n-1)d$. இங்கு a என்பது முதல் உறுப்பு, d என்பது பொது வித்தியாசம்.

2. பொதுவாக ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் பொது வித்தியாசம் காண நாம் இரண்டாம் உறுப்பிலிருந்து முதல் உறுப்பைக் கழிக்க வேண்டும் (அ) மூன்றாம் உறுப்பிலிருந்து இரண்டாம் உறுப்பைக் கழிக்க வேண்டும் என்பது போலத் தொடரலாம்.

   உதாரணமாக, $t_1 = a,\ t_2 = a + d$
   $t_2 - t_1 = (a + d) - a = d$
   இதுபோலவே, $t_2 = a + d,\ t_3 = a+2d$
   $t_3 - t_2 = (a + 2d) - (a + d) = d$
   பொதுவாக, $d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = \ldots.$
   எனவே, $d = t_n - t_{n-1}\,, \quad n = 2, 3, 4,\ldots$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான இரு உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் ________.
2. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d எனில், அதன் 8 –வது உறுப்பு ________.
3. t_n என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n-வது உறுப்பு எனில், $t_{2n} - t_n$ –யின் மதிப்பு ________.

பின்வரும் கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் பொது வித்தியாசம் காண முயல்வோம்.

(i) $1, 4, 7, 10, \ldots$

$d = 4 - 1 = 7 - 4 = 10 - 7 = \ldots = 3$

(ii) $6, 2, -2, -6, \ldots$

$d = 2 - 6 = -2 - 2 = -6 - (-2) = \ldots = -4$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

பொது வித்தியாசமானது மிகை எண்ணாகவோ, குறை எண்ணாகவோ அல்லது பூச்சியமாகவோ அமையலாம்.

சிந்தனைக் களம்

t_n என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n –வது உறுப்பு எனில் $t_{n+1} - t_{n-1}$ –யின் மதிப்பு _____.

எடுத்துக்காட்டு 2.23 பின்வரும் தொடர் வரிசைகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையா, இல்லையா எனச் சோதிக்க.

(i) $x+2,\ 2x+3,\ 3x+4, \ldots$ (ii) $2,\ 4,\ 8,\ 16, \ldots$ (iii) $3\sqrt{2},\ 5\sqrt{2},\ 7\sqrt{2},\ 9\sqrt{2}, \ldots$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசையானது கூட்டுத் தொடர்வரிசை என நிரூபிக்க வேண்டுமானால், அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக உள்ளனவா என சோதித்தால் போதுமானது.

(i) $t_2 - t_1 = (2x+3) - (x+2) = x+1$

$t_3 - t_2 = (3x+4) - (2x+3) = x+1$

$t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

இங்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக உள்ளது. எனவே, $x+2,\ 2x+3,\ 3x+4, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

(ii) $t_2 - t_1 = 4 - 2 = 2$

$t_3 - t_2 = 8 - 4 = 4$

$t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$

இங்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக இல்லை. எனவே, $2,\ 4,\ 8,\ 16, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை அல்ல.

(iii) $t_2 - t_1 = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$t_3 - t_2 = 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

இங்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் சமமாக உள்ளது. எனவே, $3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 9\sqrt{2},\ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.24 முதல் உறுப்பு 20 ஆகவும் பொது வித்தியாசம் 8 ஆகவும் கொண்ட கூட்டுத் தொடர்வரிசையை எழுதவும்.

தீர்வு முதல் உறுப்பு $a = 20$; பொது வித்தியாசம் $d = 8$

கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொது வடிவம் $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ldots$

இந்த நிகழ்வில் நாம் பெறுவது $20,\ 20+8,\ 20+2(8),\ 20+3(8),\ldots$

எனவே, தேவையான கூட்டுத் தொடர்வரிசை $20, 28, 36, 44, \ldots$ ஆகும்.

குறிப்பு

பொது வித்தியாசம் பூச்சியமாக கிடைக்கும் கூட்டுத் தொடர்வரிசை மாறிலிக் கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனப்படும்.

செயல்பாடு 4

இங்கு ஐந்து பெட்டிகள் உள்ளன. நீங்கள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் ஒரு எண்ணைத் தேர்வு செய்து ஐந்து வெவ்வேறு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளை உருவாக்கவும்.

8	14	26	20	32
6	1	3.5	11	8.5
–8	40	–14	–11	–2
12	–5	7	–3	17
85	2	55	70	100

எடுத்துக்காட்டு 2.25 $3,15,27,39,\ldots$ என்ற தொடர்வரிசையின் 15-வது, 24-வது மற்றும் n -வது உறுப்பு (பொது உறுப்பு) காண்க.

தீர்வு முதல் உறுப்பு $a = 3$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d = 15-03 = 12$.

முதல் உறுப்பு a, பொது வித்தியாசம் d ஆக உள்ள கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n –வது உறுப்பு

$t_n = a + (n-1)d$ என நாம் அறிவோம்.

$$t_{15} = a + (15-1)d = a + 14d = 3 + 14(12) = 171$$

(இங்கு $a=3$ மற்றும் $d=12$)

$$t_{24} = a + (24-1)d = a + 23d = 3 + 23(12) = 279$$

n –வது உறுப்பு (பொது உறுப்பு) $t_n = a + (n-1)d$

$$t_n = 3 + (n-1)12$$

$$t_n = 12n - 9$$

குறிப்பு

ஒரு முடிவுறு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முதல் உறுப்பு a, கடைசி உறுப்பு l எனில், அக்கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = \left(\dfrac{l-a}{d}\right) + 1$. ஏனெனில், $l = a + (n-1)d$

X_Ch 2 TM.indd 59 07-02-2020 05:32:05 PM

எடுத்துக்காட்டு 2.26 $3, 6, 9, 12, \ldots, 111$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

தீர்வு

முதல் உறுப்பு $a = 3$; பொது வித்தியாசம் $d = 6 - 3 = 3$;

கடைசி உறுப்பு $l = 111$

$$n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1 \text{ என நாம் அறிவோம்.}$$

$$n = \left(\frac{111-3}{3}\right) + 1 = 37$$

எனவே, இந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் 37 உறுப்புகள் உள்ளன.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. மாறிலிக் கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் பொது வித்தியாசம் ________
2. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு a, கடைசி உறுப்பு l எனில் அத்தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை ________

எடுத்துக்காட்டு 2.27 ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 7 –வது உறுப்பு -1 மற்றும் 16 –வது உறுப்பு 17 எனில், அதன் பொது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots$ என்பது தேவையான கூட்டுத் தொடர்வரிசை என்க.

$t_7 = -1$ மற்றும் $t_{16} = 17$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$a + (7-1)d = -1 \text{ மற்றும் } a + (16-1)d = 17$$

$$a + 6d = -1 \quad \ldots(1)$$

$$a + 15d = 17 \quad \ldots(2)$$

சமன்பாடு (2) –லிருந்து சமன்பாடு (1) ஐ கழிக்க, நாம் பெறுவது $9d = 18$ –லிருந்து $d = 2$.

$d = 2$ எனச் சமன்பாடு (1)–யில் பிரதியிட நாம் பெறுவது, $a + 12 = -1$. எனவே $a = -13$

ஆகவே, பொது உறுப்பு $t_n = a + (n-1)d$

$$= -13 + (n-1) \times 2 = 2n - 15$$

எடுத்துக்காட்டு 2.28 ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் l, m மற்றும் n ஆவது உறுப்புகள் முறையே x, y மற்றும் z எனில், பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க.

(i) $x(m-n) + y(n-l) + z(l-m) = 0$ (ii) $(x-y)n + (y-z)l + (z-x)m = 0$

தீர்வு (i) முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d என்க. $t_l = x, t_m = y, t_n = z$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பொது உறுப்பு சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது,

$$a + (l-1)d = x \quad \ldots(1)$$

$$a + (m-1)d = y \quad \ldots(2)$$

$$a + (n-1)d = z \quad \ldots(3)$$

$$x(m-n) + y(n-l) + z(l-m)$$

$$= a[(m-n) + (n-l) + (l-m)] + d[(m-n)(l-1) + (n-l)(m-1) + (l-m)(n-1)]$$

$$= a[0] + d[lm - ln - m + n + mn - lm - n + l + ln - mn - l + m]$$

$$= a(0) + d(0) = 0$$

(ii) சமன்பாடு (1) –லிருந்து (2), (2) –லிருந்து (3), (3) –லிருந்து (1) ஐக் கழித்தால் நாம் பெறுவது,

$$x - y = (l-m)d$$

$$y - z = (m-n)d$$

$$z - x = (n-l)d$$

$$(x-y)n + (y-z)l + (z-x)m = [(l-m)n + (m-n)l + (n-l)m]d$$

$$= \left[ln - mn + lm - nl + nm - lm\right]d = 0$$

குறிப்பு

ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில்,

- ஒவ்வோர் உறுப்புடன் ஒரு மாறாத எண்ணைக் கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ கிடைக்கும் புதிய தொடர்வரிசையும் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையாகும்.
- ஒவ்வோர் உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கினாலோ அல்லது வகுத்தாலோ கிடைக்கும் புதிய தொடர்வரிசையும் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையாகும்.
- ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் கொடுக்கப்பட்டால் அந்த மூன்று உறுப்புகளை நாம் $a-d,\ a$ மற்றும் $a+d$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம். இங்குப் பொது வித்தியாசம் d ஆகும்.
- ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த நான்கு உறுப்புகளின் கூடுதல் கொடுக்கப்பட்டால் அந்த நான்கு உறுப்புகளை நாம் $a-3d,\ a-d,\ a+d$ மற்றும் $a+3d$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம். இங்குப் பொது வித்தியாசம் $2d$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.29 ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த நான்கு உறுப்புகளின் கூடுதல் 28 மற்றும் அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 276. அந்த நான்கு எண்களைக் காண்க.

தீர்வு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்த அடுத்தடுத்த நான்கு எண்களை $(a-3d), (a-d), (a+d)$ மற்றும் $(a+3d)$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

நான்கு உறுப்புகளின் கூடுதல் 28 என்பதால்,

$$a-3d+a-d+a+d+a+3d=28$$

$$4a=28 \Rightarrow a=7$$

இதுபோலவே, அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 276 என்பதால்,

$$(a-3d)^2+(a-d)^2+(a+d)^2+(a+3d)^2=276.$$

$$a^2-6ad+9d^2+a^2-2ad+d^2+a^2+2ad+d^2+a^2+6ad+9d^2=276$$

$$4a^2+20d^2=276 \Rightarrow 4(7)^2+20d^2=276$$

$$d^2=4 \Rightarrow d=\pm\sqrt{4} \text{ எனில் } d=\pm 2$$

$a=7,\ d=2$ எனில், தேவையான நான்கு எண்கள் $7-3(2),\ 7-2,\ 7+2$ மற்றும் $7+3(2)$

அதாவது, $1, 5, 9$ மற்றும் 13.

$a=7,\ d=-2$ எனில், தேவையான நான்கு எண்கள் $13, 9, 5$ மற்றும் 1.

எனவே, கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்த நான்கு எண்கள் $1, 5, 9$ மற்றும் 13.

மூன்று எண்கள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைவதற்கான நிபந்தனை

a, b, c என்ற எண்கள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருக்குமெனில், $b=a+d,\ c=a+2d$

அதாவது, $a+c=2a+2d=2(a+d)=2b$

$$2(a+d)=2b$$

ஆகவே $2b=a+c$

இதுபோலவே, $2b=a+c$, எனில், $b-a=c-b$ எனவே a, b, c ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும்.

ஆகவே, மூன்று பூச்சியமற்ற எண்கள் a, b, c என்பன கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருந்தால் மட்டுமே $2b=a+c$

எடுத்துக்காட்டு 2.30 ஒரு தாய் தன்னிடம் உள்ள ₹207 ஐ கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் அமையும் மூன்று பாகங்களாகப் பிரித்துத் தனது மூன்று குழந்தைகளுக்கும் கொடுக்க விரும்பினார். அவற்றில் இரு சிறிய தொகைகளின் பெருக்கற்பலன் ₹4623 ஆகும். ஒவ்வொரு குழந்தையும் பெறும் தொகையினைக் காண்க.

தீர்வு மூன்று குழந்தைகள் பெறும் தொகை கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைவதால் அவற்றை , $a-d$, a, $a+d$ என்க. தொகையின் கூடுதல் ₹207 என்பதால்

$$(a-d)+a+(a+d)=207$$
$$3a=207 \Rightarrow a=69$$

இரு சிறிய தொகைகளின் பெருக்கற்பலன் 4623 என்பதால்

$$(a-d)a=4623$$
$$(69-d)69=4623$$
$$d=2$$

எனவே, மூன்று குழந்தைகளுக்கும் தாய் பிரித்துக் கொடுத்த தொகை

₹$(69-2)$, ₹69, ₹$(69+2)$. அதாவது, ₹67, ₹69 மற்றும் ₹71.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் 3-ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் புதிய கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொது வித்தியாசம் ________.
2. a, b, c என்ற மூன்று எண்கள் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும் என இருந்தால் மட்டுமே ________.

பயிற்சி 2.5

1. பின்வரும் தொடர் வரிசைகள் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையா எனச் சோதிக்கவும்.
   (i) $a-3, a-5, a-7, \ldots$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ (iii) $9, 13, 17, 21, 25, \ldots$
   (iv) $\frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$ (v) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d-க்குக் கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளைக் காண்க.
   (i) $a=5, d=6$ (ii) $a=7, d=-5$ (iii) $a=\frac{3}{4}, d=\frac{1}{2}$
3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொது உறுப்புகளையுடைய கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது வித்தியாசம் காண்க.
   (i) $t_n=-3+2n$ (ii) $t_n=4-7n$
4. $-11, -15, -19, \ldots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 19 –வது உறுப்பைக் காண்க.
5. $16, 11, 6, 1, \ldots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் -54 என்பது எத்தனையாவது உறுப்பு?
6. $9, 15, 21, 27, \ldots, 183$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் நடு உறுப்புகளைக் காண்க.
7. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் ஒன்பதாவது உறுப்பின் ஒன்பது மடங்கும், பதினைந்தாவது உறுப்பின் பதினைந்து மடங்கும் சமம் எனில் இருபத்து நான்காவது உறுப்பின் ஆறு மடங்கானது பூச்சியம் என நிறுவுக.
8. $3+k$, $18-k$, $5k+1$ என்பவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில், k–யின் மதிப்புக் காண்க.

9. x, 10, y, 24, z என்பவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில், x, y, z ஆகியவற்றின் மதிப்பு காண்க.

10. ஒரு சினிமா அரங்கின் முதல் வரிசையில் 20 இருக்கைகளும் மொத்தம் 30 வரிசைகளும் உள்ளன. அடுத்தடுத்த ஒவ்வொரு வரிசையிலும் அதற்கு முந்தைய வரிசையைவிட இரண்டு இருக்கைகள் கூடுதலாக உள்ளன. கடைசி வரிசையில் எத்தனை இருக்கைகள் இருக்கும்?

11. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்த அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 27 மற்றும் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் 288 எனில், அந்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

12. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 6-வது மற்றும் 8-வது உறுப்புகளின் விகிதம் $7{:}9$ எனில், 9-வது மற்றும் 13-வது உறுப்புகளின் விகிதம் காண்க.

13. ஒரு குளிர்காலத்தில் திங்கள்கிழமை முதல் வெள்ளிக்கிழமை வரை ஊட்டியின் வெப்பநிலை கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன. திங்கள் கிழமை முதல் புதன்கிழமை வரை உள்ள வெப்பநிலைகளின் கூடுதல் $0°C$ மற்றும் புதன்கிழமை முதல் வெள்ளிக்கிழமை வரை உள்ள வெப்பநிலைகளின் கூடுதல் $18°C$ எனில், ஐந்து நாட்களின் வெப்பநிலைகளைக் காண்க.

14. பிரியா தனது முதல் மாத வருமானமாக ₹$15,000$ ஈட்டுகிறார். அதன் பிறகு ஒவ்வோர் ஆண்டும் அவரது மாத வருமானம் ₹1500 உயர்கிறது. அவளுடைய முதல் மாத செலவு ₹$13,000$ மற்றும் அவளது மாதாந்திரச் செலவு ஒவ்வோர் ஆண்டும் ₹900 உயர்கிறது. பிரியாவின் மாதாந்திரச் சேமிப்பு ₹$20,000$ அடைய எவ்வளவு காலம் ஆகும்?

2.8 தொடர்கள் (Series)

ஒரு தொடர்வரிசையின் உறுப்புகளின் கூடுதல் **தொடர்** எனப்படும். $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ என்பது ஒரு மெய்யெண் தொடர்வரிசை என்க. இங்கு $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ என்பது மெய்யெண் தொடர் ஆகும்.

ஒரு தொடரில் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது **முடிவுறு தொடர்** எனப்படும். ஒரு தொடரில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது **முடிவுறாத் தொடர்** எனப்படும். நாம் இங்கு முடிவுறு தொடர்களை மட்டுமே விவாதிப்போம்.

2.8.1 ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் (Sum to n terms of an A.P.)

ஒரு தொடரின் உறுப்புகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையுமானால் அத்தொடர் **கூட்டுத் தொடர்** எனப்படும்.

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை என்க.

ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் ஆனது S_n எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. $S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+(n-1)d)$ $\quad\ldots(1)$

மேற்கண்ட தொடர்வரிசையைக் கடைசியிலிருந்து முதலாவது உறுப்பு வரை மாற்றி எழுத நாம் பெறுவது,

$$S_n = (a+(n-1)d) + (a+(n-2)d) + \cdots + (a+d) + a \qquad \ldots(2)$$

(1) மற்றும் (2) ஐக் கூட்ட நாம் பெறுவது,

$$2S_n = [a+a+(n-1)d]+[a+d+a+(n-2)d]+\cdots+[a+(n-2)d+(a+d)]+[a+(n-1)d+a]$$
$$= [2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d+\cdots+[2a+(n-1)d] \ (n \text{ உறுப்புகள்})$$
$$2S_n = n\times[2a+(n-1)d] \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}\left[2a+\left(n-1\right)d\right]$$

குறிப்பு

ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் உறுப்பு a மற்றும் கடைசி உறுப்பு l (n^{th}–வது உறுப்பு) கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், $S_n = \frac{n}{2}\left[2a+\left(n-1\right)d\right] = \frac{n}{2}\left[a+a+\left(n-1\right)d\right]$.

$S_n = \frac{n}{2}[a+l]$. (ஏனெனில், $l = a+\left(n-1\right)d$)

முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு தொடர் வரிசையிலுள்ள உறுப்புகளின் கூடுதல் _______.
2. ஒரு தொடரில் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் அமையுமானால் அது _______ எனப்படும்.
3. ஒரு தொடரின் உறுப்புகள் _______–யில் அமைந்தால் அத்தொடர் ஒரு கூட்டுத்தொடர் எனப்படும்.
4. ஒரு கூட்டுத் தொடரின் முதல் உறுப்பு மற்றும் கடைசி உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டால் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காணும் சூத்திரம் _______.

எடுத்துக்காட்டு 2.31 $8, 7\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2}, 5\frac{3}{4}, \ldots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் 15 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு இங்கு முதல் உறுப்பு $a = 8$, பொது வித்தியாசம் $d = 7\frac{1}{4} - 8 = -\frac{3}{4}$,

கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\left[2\times 8+(15-1)(-\frac{3}{4})\right]$$
$$S_{15} = \frac{15}{2}\left[16-\frac{21}{2}\right] = \frac{165}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.32 $0.40+0.43+0.46+\cdots+1$ என்ற தொடரின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு இங்கு, $a = 0.40$ மற்றும் $l = 1$, $d = 0.43-0.40 = 0.03$.

$$\text{ஆகவே, } n = \left(\frac{l-a}{d}\right)+1$$
$$= \left(\frac{1-0.40}{0.03}\right)+1 = 21$$

ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல், $S_n = \frac{n}{2}[a+l]$

இங்கு, $n = 21$. எனவே $S_{21} = \frac{21}{2}[0.40+1] = 14.7$

ஆகவே கூட்டுத் தொடரின் 21 உறுப்புகளின் கூடுதல் 14.7 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.33 $1+5+9+\ldots$ என்ற தொடரில் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் 190 கிடைக்கும்?

தீர்வு இங்கு $S_n = 190$. எனில், n –யின் மதிப்பைக் காணவேண்டும். முதல் உறுப்பு $a = 1$, பொது வித்தியாசம் $d = 5-1 = 4$.

கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$\begin{aligned} S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] &= 190 \\ \frac{n}{2}[2\times 1+(n-1)\times 4] &= 190 \\ n[4n-2] &= 380 \\ 2n^2-n-190 &= 0 \\ (n-10)(2n+19) &= 0 \end{aligned}$$

சிந்தனைக் களம்

n –யின் மதிப்பு மிகை முழுவாக மட்டுமே இருக்கவேண்டும். ஏன்?

ஆனால் $n = 10$ ஏனெனில் $n = -\frac{19}{2}$ என்பது பொருந்தாது. எனவே, $n = 10$.

முன்னேற்றச் சோதனை

சரியா, தவறா எனக் கூறுக.

1. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n-வது உறுப்பானது $pn+q$ என்ற வடிவில் அமையும், இங்கு p மற்றும் q ஆனது மாறிலிகள்.
2. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் ஆனது $pn^2+qn + r$ என்ற வடிவில் அமையும், இங்கு p, q, r என்பன மாறிலிகள்.

எடுத்துக்காட்டு 2.34 ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 13-வது உறுப்பு 3 மற்றும் முதல் 13 உறுப்புகளின் கூடுதல் 234 எனில், கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொது வித்தியாசம் மற்றும் முதல் 21 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு 13-வது உறுப்பு $=3$ என்பதால், $t_{13} = a+12d = 3$ $\quad\ldots(1)$

முதல் 13 உறுப்புகளின் கூடுதல் $= 234$ என்பதால்

$$S_{13} = \frac{13}{2}[2a+12d] = 234$$

$$2a+12d = 36 \quad\ldots(2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஐத் தீர்க்க நாம் பெறுவது, $a = 33,\ d = \frac{-5}{2}$

எனவே, பொது வித்தியாசம் $\frac{-5}{2}$.

முதல் 21 உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_{21} = \frac{21}{2}\left[2\times 33+(21-1)\times\left(-\frac{5}{2}\right)\right] = \frac{21}{2}[66-50] = 168.$

எடுத்துக்காட்டு 2.35 ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $\frac{5n^2}{2}+\frac{3n}{2}$ எனில், 17–வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு முதல் 17 உறுப்புகளின் கூடுதலிலிருந்து முதல் 16 உறுப்புகளின் கூடுதலைக் கழித்தால் 17-வது உறுப்பைக் காணலாம்.

$$S_{17} = \frac{5\times(17)^2}{2}+\frac{3\times 17}{2} = \frac{1445}{2}+\frac{51}{2} = 748$$

$$S_{16} = \frac{5\times(16)^2}{2}+\frac{3\times 16}{2} = \frac{1280}{2}+\frac{48}{2} = 664$$

$$t_{17} = S_{17}-S_{16} = 748-664 = 84$$

எடுத்துக்காட்டு 2.36 300–க்கும் 600–க்கும் இடையே 7-ஆல் வகுபடும் அனைத்து இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு 300-க்கும் 600-க்கும் இடையே 7-ஆல் வகுபடும் இயல் எண்கள் 301, 308, 315, ..., 595.
300-க்கும் 600-க்கும் இடையே 7-ஆல் வகுபடும் இயல் எண்களின் கூடுதல் $301+308+315+\cdots+595$.

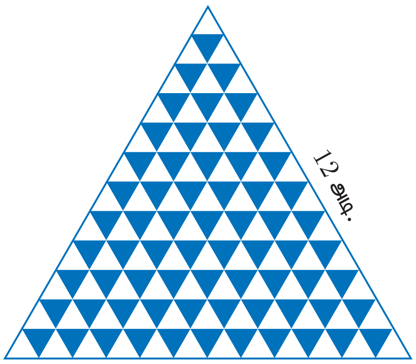
மேற்கண்ட தொடரின் உறுப்புகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்துள்ளன.

முதல் உறுப்பு $a=301$; பொது வித்தியாசம் $d=7$; கடைசி உறுப்பு $l=595$.

$$n=\left(\frac{l-a}{d}\right)+1=\left(\frac{595-301}{7}\right)+1=43$$

$$S_n=\frac{n}{2}[a+l], \text{ என்பதால் } S_{43}=\frac{43}{2}[301+595]=19264.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.37 சிறிய தரையோடுகளைக் கொண்டு 12 அடி பக்க அளவுள்ள சமபக்க முக்கோண தரையோடுகள் (Mosaic) அமைக்கப்படுகிறது. அவற்றில் உள்ள ஒவ்வொரு தரையோடும் 12 அங்குல அளவிலான சமபக்க முக்கோண வடிவில் உள்ளது. சிறிய தரையோடுகளின் வண்ணங்கள் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது போல மாறி மாறி உள்ளன. ஒவ்வொரு வண்ணத்திலும் உள்ள தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட அமைப்பில் உள்ள மொத்த தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை காண்க.



படம் 2.12

தீர்வு தரையோடுகள் ஆனது 12 அடி பக்க அளவுள்ள சமபக்க முக்கோணமாகவும் மற்றும் ஒவ்வொரு சிறிய தரையோடும் 12 அங்குல (1 அடி) பக்க அளவுள்ள சமபக்க முக்கோணமாகவும் இருப்பதால், இந்த அமைப்பில் 12 வரிசைகளில் சிறிய தரையோடுகள் அடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

படத்திலிருந்து ஒவ்வொரு வரிசையிலும் உள்ள வெள்ளை நிற தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை 1, 2, 3, 4, ..., 12 என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை என அறியலாம்.

இதுபோல ஒவ்வொரு வரிசையிலும் உள்ள நீல நிற தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை 0, 1, 2, 3, ..., 11. இதுவும் ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையாகும்.

வெள்ளை நிற தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை $=1+2+3+\cdots+12=\frac{12}{2}[1+12]=78$

நீல நிற தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை $=0+1+2+3+\cdots+11=\frac{12}{2}[0+11]=66$

மொத்த தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை $=78+66=144$

எடுத்துக்காட்டு 2.38 ஒரு தெருவிலுள்ள வீடுகளுக்கு 1 முதல் 49 வரை தொடர்ச்சியாகக் கதவிலக்கம் வழங்கப்பட்டுள்ளது. செந்திலின் வீட்டிற்கு முன்னதாக உள்ள வீடுகளின் கதவிலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையானது செந்திலின் வீட்டிற்குப் பின்னதாக உள்ள வீடுகளின் கதவிலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம் எனில் செந்திலின் வீட்டுக் கதவிலக்கத்தைக் காண்க.

தீர்வு செந்திலின் வீட்டுக் கதவிலக்கம் x என்க.

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+(x-1) &= (x+1)+(x+2)+\cdots+49\\
1+2+3+\cdots+(x-1) &= \left[1+2+3+\cdots+49\right]-\left[1+2+3+\cdots+x\right]\\
\frac{x-1}{2}\left[1+(x-1)\right] &= \frac{49}{2}\left[1+49\right]-\frac{x}{2}\left[1+x\right]\\
\frac{x(x-1)}{2} &= \frac{49\times 50}{2}-\frac{x(x+1)}{2}\\
x^2-x &= 2450-x^2-x \Rightarrow 2x^2=2450 \Rightarrow x^2=1225 \Rightarrow x=35
\end{aligned}$$

எனவே, செந்திலின் வீட்டுக் கதவிலக்கம் 35 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.39 $S_1,\ S_2$ மற்றும் S_3 என்பன முறையே ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n,\ 2n$ மற்றும் $3n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் ஆகும். $S_3 = 3(S_2 - S_1)$ என நிறுவுக.

தீர்வு $S_1,\ S_2$ மற்றும் S_3 என்பன முறையே ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் $n,\ 2n$ மற்றும் $3n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் எனில்,

$$S_1 = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right],\quad S_2 = \frac{2n}{2}\left[2a+(2n-1)d\right],\quad S_3 = \frac{3n}{2}\left[2a+(3n-1)d\right]$$

தற்போது, $$S_2 - S_1 = \frac{2n}{2}\left[2a+(2n-1)d\right] - \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[\left[4a+2(2n-1)d\right] - \left[2a+(n-1)d\right]\right]$$

$$S_2 - S_1 = \frac{n}{2}\times\left[2a+(3n-1)d\right]$$

$$3(S_2 - S_1) = \frac{3n}{2}\left[2a+(3n-1)d\right]$$

$$3(S_2 - S_1) = S_3$$

சிந்தனைக் களம்

1. முதல் 'n' ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல் என்ன?
2. முதல் 'n' இரட்டை இயல் எண்களின் கூடுதல் என்ன?

பயிற்சி 2.6

1. பின்வருவனவற்றின் கூடுதல் காண்க.
   (i) 3,7,11,... 40 உறுப்புகள் வரை (ii) 102,97,92,... 27 உறுப்புகள் வரை
   (iii) $6+13+20+\cdots+97$
2. 5 –லிருந்து தொடங்கி எத்தனை தொடர்ச்சியான ஒற்றை முழுக்களைக் கூட்டினால் கூடுதல் 480 கிடைக்கும்?.
3. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n–வது உறுப்பு $4n-3$ எனில், அதன் முதல் 28 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.
4. ஒரு குறிப்பிட்ட தொடரின் முதல் 'n' உறுப்புகளின் கூடுதல் $2n^2 - 3n$ எனில், அது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை என நிரூபிக்க.
5. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 104–வது உறுப்பு மற்றும் 4–வது உறுப்புகள் முறையே 125 மற்றும் 0. அத்தொடர்வரிசையின் முதல் 35 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.
6. 450–க்குக் குறைவாக உள்ள அனைத்து ஒற்றை மிகை முழுக்களின் கூடுதல் காண்க.
7. 602–க்கும் 902–க்கும் இடையே 4 ஆல் வகுபடாத இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க.
8. இரகு ஒரு மடிக்கணினி வாங்க விரும்புகிறார். அவர் அதற்கான தொகையான ₹40,000–ஐ உடனடியாக பணமாகவும் செலுத்தலாம் அல்லது 10 மாதத் தவணைகளில் முதல் தவணை ₹4800, இரண்டாம் தவணை ₹4750, மூன்றாம் தவணை ₹4700 என்ற அடிப்படையிலும் செலுத்தலாம். அவர் இந்த வகையில் பணம் செலுத்துகிறார் எனில்,
   (i) 10 மாதத் தவணைகளில் அவர் செலுத்திய மொத்தத் தொகை
   (ii) மாதத் தவணை அடிப்படையில் பணம் செலுத்தும்போது அவர் அசலைக் காட்டிலும் கூடுதலாகச் செலுத்திய தொகை ஆகியவற்றைக் காண்க.
9. ஒருவர் தான் பெற்ற ₹65,000 கடனை திருப்பிச் செலுத்த முதல் மாதம் ₹400 செலுத்துகிறார். அதன் பிறகு ஒவ்வொரு மாதமும் முந்தைய மாதம் செலுத்தியதைவிட ₹300 கூடுதலாகச் செலுத்துகிறார். அவர் இந்தக் கடனை அடைக்க எவ்வளவு காலம் தேவைப்படும்?

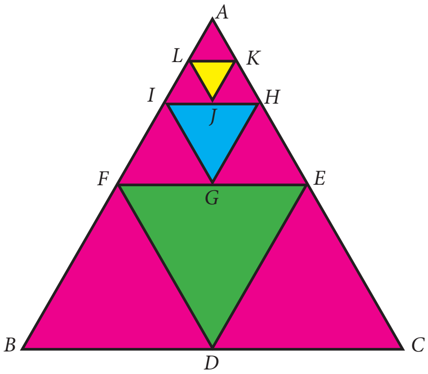
10. செங்கற்களினால் கட்டப்பட்ட ஒரு படிக்கட்டில் மொத்தம் 30 படிகட்டுகள் உள்ளன. கீழ்ப் படிக்கட்டை அமைப்பதற்கு 100 செங்கற்கள் தேவைப்படுகிறது. அடுத்தடுத்த படிக்கட்டுகள் அமைப்பதற்கு முந்தைய படிக்கட்டை விட இரண்டு செங்கற்கள் குறைவாகத் தேவைப்படுகிறது.
   (i) உச்சியிலுள்ள படிக்கட்டை அமைப்பதற்கு எத்தனை செங்கற்கள் தேவை?
   (ii) படிகட்டுகள் முழுவதும் அமைப்பதற்கு எத்தனை செங்கற்கள் தேவை?

11. $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_m$ என்பன m வெவ்வேறு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் n உறுப்புகளின் கூடுதலாகும். முதல் உறுப்புகள் $1, 2, 3, \ldots, m$ மற்றும் பொது வித்தியாசங்கள் $1, 3, 5, \ldots, (2m-1)$ முறையே அமைந்தால், அந்த கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_m = \frac{1}{2}mn(mn+1)$ என நிரூபிக்க.

12. $\left[\frac{a-b}{a+b} + \frac{3a-2b}{a+b} + \frac{5a-3b}{a+b} + \cdots 12 \text{ உறுப்புகள்}\right]$ என்ற தொடரின் கூடுதல் காண்க.

2.9 பெருக்குத்தொடர் வரிசை (Geometric Progression)

படத்தில் உள்ள ΔDEF ஆனது ΔABC–யின் பக்கங்கள் AB, BC மற்றும் CA ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளை இணைத்து அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அப்படியெனில் ΔDEF–யின் பரப்பானது ΔABC–யின் பரப்பில் நான்கில் ஒரு பங்கு ஆகும். இதுபோலவே ΔGHI–யின் பரப்பானது ΔDEF–யின் பரப்பில் நான்கில் ஒரு பங்கு ஆகும் மற்றும் மற்ற சிறிய முக்கோணங்களுக்கும் இது போலவே தொடரும். பொதுவாக, ஒவ்வொரு சிறிய முக்கோணத்தின் பரப்பும் அதற்கு முந்தைய பெரிய முக்கோணத்தின் பரப்பில் நான்கில் ஒரு பங்காக இருக்கும்.



படம் 2.13

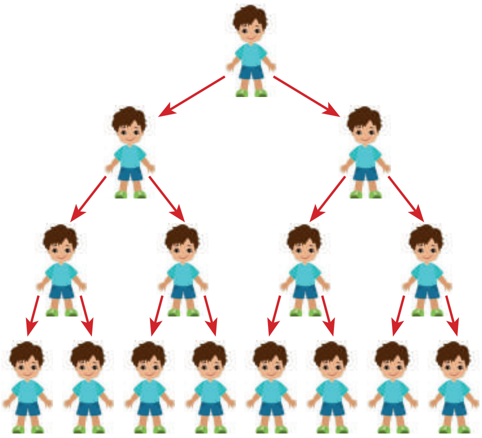
இந்த முக்கோணங்களின் பரப்பானது

$$\Delta ABC, \ \frac{1}{4}\ \Delta\ \mathrm{ABC}, \ \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\ \Delta\ ABC, \ldots$$

அதாவது, $\Delta\ ABC, \ \frac{1}{4}\ \Delta\ ABC, \ \frac{1}{16}\ \Delta\ ABC, \ldots$

இந்த உதாரணத்தில் நாம் ΔABC–யில் தொடங்குகிறோம். அடுத்தடுத்த முக்கோணங்களின் பரப்பானது முந்தைய முக்கோணத்தின் பரப்பில் நான்கில் ஒரு பங்காக உள்ளது. அதாவது ஒவ்வோர் உறுப்பும் முந்தைய உறுப்பை $\frac{1}{4}$ ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கிறது.

வைரஸினால் பரவும் நோய்களைப் பற்றிய மற்றொரு உதாரணத்தைக் கருதுவோம். ஒரு வைரஸ் நோயானது ஒவ்வொரு நிலையிலும் ஒரு பாதிக்கப்பட்ட நபரிடமிருந்து இரு புதிய நபர்களுக்குப் பரவுகிறது. முதல் நிலையில் ஒரு நபர் பாதிக்கப்படுகிறார், இரண்டாம் நிலையில் இரு நபர்கள் பாதிக்கப்படுகின்றனர், மூன்றாம் நிலையில் நான்கு நபர்கள் பாதிக்கப்படுகின்றனர் மற்றும் இவ்வாறே தொடர்கிறது. ஒவ்வொரு நிலையிலும் பாதிக்கப்பட்ட நபர்களின் எண்ணிக்கையானது $1, 2, 4, 8, \ldots$ என்றவாறு அமைகிறது. இங்கு முதல் உறுப்பைத் தவிர, ஒவ்வோர் உறுப்பும் முந்தைய உறுப்பின் இரு மடங்கு ஆகும்.


படம் 2.14

மேற்கண்ட இரு உதாரணங்களிலிருந்து, ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு முந்தைய உறுப்பை ஒரே எண்ணால் பெருக்கினால் கிடைக்கிறது என்பதை நாம் தெளிவாக அறியலாம். இந்தக் கருத்துகள் நம்மை பெருக்குத் தொடர்வரிசை என்ற புதிய கோட்பாட்டிற்கு அழைத்துச் செல்கின்றன.

வரையறை : முதல் உறுப்பைத் தவிர்த்து மற்ற உறுப்புகள் அனைத்தும் அதற்கு முந்தைய உறுப்பை ஒரு பூச்சியமற்ற மாறாத எண்ணால் பெருக்கக் கிடைக்கும் தொடர்வரிசையானது, **பெருக்குத் தொடர்வரிசை** எனப்படும். இந்த மாறாத எண் பொது விகிதம் எனப்படும். பொது விகிதம் வழக்கமாக r எனக் குறிக்கப்படும்.

2.9.1 பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது வடிவம் (General form of Geometric Progression)

a மற்றும் $r \neq 0$ என்பன மெய்யெண்கள் என்க. $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1} \ldots$ என்ற வடிவில் அமையும் எண்களைப் "பெருக்குத் தொடர்வரிசை" (Geometric Progression). என்கிறோம். இங்கு 'a' என்பது முதல் உறுப்பு (First term) என்றும் 'r' என்பது பொது விகிதம் (Common ratio) என்றும் அழைக்கப்படும். முதல் உறுப்பு 'a' –யில் தொடங்கி பொது விகிதம் 'r' என்ற எண்ணால் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் பெருக்கினால் கிடைப்பது $ar, ar^2, ar^3, \ldots$ என்பதை கவனத்தில் கொள்வோம்.

2.9.2 பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பு (General term of Geometric Progression)

பொது விகிதத்தில் அமைந்த ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் n –வது உறுப்பு அல்லது பொது உறுப்பைக் காண ஒரு சூத்திரத்தைக் காண்போம்.

$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}, \ldots$ இங்கு, 'a' என்பது முதல் உறுப்பு மற்றும் 'r' என்பது பொது விகிதம். t_n என்பது பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் n –வது உறுப்பு என்க.

$$\begin{aligned}
t_1 &= a = a \times r^0 = a \times r^{1-1} \\
t_2 &= t_1 \times r = a \times r = a \times r^{2-1} \\
t_3 &= t_2 \times r = ar \times r = ar^2 = ar^{3-1} \\
\vdots & \quad \vdots \\
t_n &= t_{n-1} \times r = ar^{n-2} \times r = ar^{n-2+1} = ar^{n-1}
\end{aligned}$$

ஆகவே, பெருக்குத்தொடர் வரிசையின் பொது உறுப்பு அல்லது n -வது உறுப்பு $t_n = ar^{n-1}$

குறிப்பு

ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதத்தைக் கருதினால், நாம் பெறுவது,

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{ar}{a} = r, \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{ar^2}{ar} = r, \quad \frac{t_4}{t_3} = \frac{ar^3}{ar^2} = r, \quad \frac{t_5}{t_4} = \frac{ar^4}{ar^3} = r, \ldots$$

ஆகவே, பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதம் எப்போதும் ஒரு மாறிலியாகத்தான் இருக்கும். இந்த மாறிலிதான் அந்தத் தொடர்வரிசையின் பொது விகிதமாகும்.

முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையானது முந்தைய உறுப்பை ஒரு ________ ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கிறது.
2. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதம் _____ மற்றும் இது ________ என அழைக்கப்படுகிறது.
3. பின்வரும் பெருக்குத் தொடர்வரிசைகளில் விடுபட்ட எண்களைக் காண்க.

(i) $\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{9}{2}, \_\_\_\_\_$ (ii) $7, \frac{7}{2}, \_\_\_\_\_$ (iii) $\_\_\_\_\_, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$

எடுத்துக்காட்டு 2.40 பின்வரும் தொடர்வரிசைகளில் எவை பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்?

(i) 7, 14, 21, 28, … (ii) $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, … (iii) 5, 25, 50, 75, …

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை, பெருக்குத் தொடர்வரிசையா எனக் கண்டறிய அவற்றின் அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதம் சமமாக உள்ளதா எனக் கண்டறிய வேண்டும்.

(i) 7, 14, 21, 28, …

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{14}{7} = 2$; $\frac{t_3}{t_2} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$; $\frac{t_4}{t_3} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$

அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமமாக இல்லாததால் 7, 14, 21, 28, … என்ற தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையல்ல.

(ii) $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, …

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$; $\frac{t_3}{t_2} = \frac{2}{1} = 2$; $\frac{t_4}{t_3} = \frac{4}{2} = 2$

இங்கு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமம் என்பதால் $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, … என்ற தொடர்வரிசையின் பொது விகிதம் $r = 2$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்.

(iii) 5, 25, 50, 75,…

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{25}{5} = 5$; $\frac{t_3}{t_2} = \frac{50}{25} = 2$; $\frac{t_4}{t_3} = \frac{75}{50} = \frac{3}{2}$

அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் விகிதங்கள் சமமாக இல்லாததால் 5, 25, 50, 75,… என்ற தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையல்ல.

சிந்தனைக் களம்

$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \ldots$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகுமா?

எடுத்துக்காட்டு 2.41 பின்வருவனவற்றின் முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது விகிதம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது, அதனுடைய பெருக்குத் தொடர்வரிசைகளைக் காண்க. (i) $a = -7$, $r = 6$ (ii) $a = 256$, $r = 0.5$

தீர்வு (i) பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது வடிவம் $a, ar, ar^2, \ldots$

$a = -7$, $ar = -7 \times 6 = -42$, $ar^2 = -7 \times 6^2 = -252$

எனவே, தேவையான பெருக்குத் தொடர்வரிசை $-7, -42, -252, \ldots$

(ii) பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது வடிவம் $a, ar, ar^2, \ldots$

$a = 256$, $ar = 256 \times 0.5 = 128$, $ar^2 = 256 \times (0.5)^2 = 64$

எனவே, தேவையான பெருக்குத் தொடர்வரிசை 256,128, 64,….

முன்னேற்றச் சோதனை

1. முதல் உறுப்பு $= a$, பொது விகிதம் $= r$, எனில், t_9 மற்றும் t_{27} ஐக் காண்க.
2. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் $t_1 = \frac{1}{5}$ மற்றும் $t_2 = \frac{1}{25}$ எனில், பொது விகிதம் ________.

எடுத்துக்காட்டு 2.42 9, 3, 1,… என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 8 –வது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு 8–வது உறுப்பைக் காண $t_n = ar^{n-1}$ என்ற n -வது சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

முதல் உறுப்பு $a = 9$, பொது விகிதம் $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$t_8 = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{8-1} = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{243}$$

எனவே, பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 8–வது உறுப்பு $\frac{1}{243}$.

எடுத்துக்காட்டு 2.43 ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 4–வது உறுப்பு $\frac{8}{9}$ மற்றும் 7–வது உறுப்பு $\frac{64}{243}$ எனில், அந்தப் பெருக்குத் தொடர்வரிசையைக் காண்க.

தீர்வு 4–வது உறுப்பு $t_4 = \frac{8}{9} \Rightarrow ar^3 = \frac{8}{9}$ ...(1)

7–வது உறுப்பு $t_7 = \frac{64}{243} \Rightarrow ar^6 = \frac{64}{243}$ ...(2)

சமன்பாடு (2) ஐ (1) ஆல் வகுக்க நாம் பெறுவது, $\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{64}{243}}{\frac{8}{9}}$

$$r^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

r–யின் மதிப்பைச் சமன்பாடு (1) –யில் பிரதியிட, $a \times \left[\frac{2}{3}\right]^3 = \frac{8}{9} \Rightarrow a = 3$

எனவே, தேவையான பெருக்குத் தொடர்வரிசை $a,\ ar,\ ar^2, \ldots$ அதாவது, $3, 2, \frac{4}{3}, \ldots$

குறிப்பு

- ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டால், அந்த மூன்று உறுப்புகளை நாம் $\frac{a}{r}, a, ar$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம்.
- ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான நான்கு உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டால், அந்த நான்கு உறுப்புகளை நாம் $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம்
- ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் ஒவ்வொர் உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கினால் அல்லது வகுத்தால் கிடைக்கும் தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.44 ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் 343 மற்றும் அவற்றின் கூடுதல் $\frac{91}{3}$ எனில், அந்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால் அந்த மூன்று உறுப்புகளை நாம் $\frac{a}{r}, a, ar$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் $= 343$

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 343$$

$$a^3 = 7^3 \Rightarrow a = 7$$

உறுப்புகளின் கூடுதல் $= \frac{91}{3}$

ஆகவே, $a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{91}{3}$

$$7\left(\frac{1 + r + r^2}{r}\right) = \frac{91}{3}$$

$$3 + 3r + 3r^2 = 13r \Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$(3r-1)(r-3) = 0 \Rightarrow r = 3$ அல்லது $r = \frac{1}{3}$

சிந்தனைக் களம்

1. 64 என்ற எண்ணைப் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமைந்த மூன்று எண்களின் பெருக்கற்பலனாக எழுதுக.
2. $a, b, c, \ldots$ என்பது பெருக்குத் தொடர்வரிசை எனில், $2a, 2b, 2c, \ldots$ என்பது ஒரு ________
3. $3, x, 6.75$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை எனில், x –யின் மதிப்பு ________

முன்னேற்றச் சோதனை

a, b, c என்ற மூன்று பூச்சியமற்ற எண்கள் பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே ________.

X_Ch 2 TM.indd 71 07-02-2020 05:32:31 PM

$a = 7,\ r = 3$ எனில், தேவையான மூன்று உறுப்புகள் $\frac{7}{3}, 7, 21$.

$a = 7,\ r = \frac{1}{3}$ எனில், தேவையான மூன்று உறுப்புகள் $21, 7, \frac{7}{3}$.

மூன்று எண்கள் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமைய நிபந்தனை

a, b, c என்ற எண்கள் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமையுமெனில், $b = ar,\ c = ar^2$

எனவே, $ac = a \times ar^2 = (ar)^2 = b^2$. ஆகவே, $b^2 = ac$

இதுபோலவே, $b^2 = ac$, எனில், $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$. எனவே, a, b, c என்பன பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமையும்.

ஆகவே, a, b, c என்ற மூன்று பூச்சியமற்ற எண்கள் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமையும் இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $b^2 = ac$.

எடுத்துக்காட்டு 2.45 ஓர் இயந்திரத்தின் தற்போதைய மதிப்பு $40,000$ மற்றும் ஒவ்வொரு வருடமும் அதன் மதிப்பு 10% குறைகிறது. 6-வது வருடத்தில் இயந்திரத்தின் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு இயந்திரத்தின் தற்போதைய மதிப்பு ₹$40,000$. அதன் மதிப்பு ஒவ்வொரு வருட முடிவில் 10% குறையும் என்பதால், முதல் வருட முடிவில் அதன் மதிப்பு ஆரம்ப மதிப்பில் 90% ஆக இருக்கும்.

அதாவது முதல் வருட முடிவில் இயந்திரத்தின் மதிப்பு $40,000 \times \frac{90}{100}$ ஆகும்.

இரண்டு வருடம் கழித்து இயந்திரத்தின் மதிப்பானது முதல் வருட மதிப்பில் 90% ஆக இருக்கும்.

இரண்டாம் வருட முடிவில் இயந்திரத்தின் மதிப்பானது $40,000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^2$ ஆகும்.

இந்த வகையில் தொடர்ந்தால், இயந்திரத்தின் மதிப்பு பின்வருமாறு குறைகிறது.

$$40000,\ 40000 \times \frac{90}{100},\ 40000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^2 \ldots$$

இந்தத் தொடர்வரிசை முதல் உறுப்பு $40,000$ மற்றும் பொது விகிதம் $\frac{90}{100}$ உடைய ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

6வது வருடத்தில் இயந்திரத்தின் மதிப்பைக் காண (5வது வருட முடிவில்), பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 6–வது உறுப்பைக் கண்டறிய வேண்டும்.

ஆகவே, $n=6,\ a=40,000,\ r = \frac{90}{100}$.

$t_n = ar^{n-1}$, என்பதைப் பயன்படுத்த, $t_6 = 40,000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^{6-1} = 40000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^5$

$$t_6 = 40,000 \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = 23619.6$$

எனவே, 6–வது வருடத்தில் இயந்திரத்தின் மதிப்பு $=$ ₹23619.60

பயிற்சி 2.7

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளில் எவை பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்?

   (i) $3, 9, 27, 81, \ldots$ (ii) $4, 44, 444, 4444, \ldots$ (iii) $0.5, 0.05, 0.005, \ldots$

   (iv) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots$ (v) $1, -5, 25, -125, \ldots$ (vi) $120, 60, 30, 18, \ldots$ (vii) $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \ldots$

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் உறுப்பு மற்றும் பொதுவிகிதம் உடைய பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகளை எழுதுக.

   (i) $a = 6,\ r = 3$ (ii) $a = \sqrt{2},\ r = \sqrt{2}$ (iii) $a = 1000,\ r = \frac{2}{5}$

3. $729, 243, 81, \ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 7–வது உறுப்பைக் காண்க.

4. $x+6,\ x+12$ மற்றும் $x+15$ என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகள் எனில், x–யின் மதிப்பைக் காண்க.

5. பின்வரும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
(i) $4, 8, 16, \ldots, 8192$ (ii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{2187}$

6. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 9–வது உறுப்பு 32805 மற்றும் 6–வது உறுப்பு 1215 எனில், 12–வது உறுப்பைக் காண்க.

7. ஒரு பெருக்கத்தொடர் வரிசையின் 8–வது உறுப்பு 768 மற்றும் பொது விகிதம் 2 எனில், அதன் 10–வது உறுப்பைக் காண்க.

8. $a,\ b,\ c$ என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும் எனில் $3^a, 3^b, 3^c$ ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமையும் எனக் காட்டுக.

9. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் 27 மற்றும் அவைகளில் இரண்டிரண்டு உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனின் கூடுதல் $\frac{57}{2}$ எனில், அந்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

10. ஒரு நபர் ஒரு நிறுவனத்தில் துணை மேலாளராகப் பணியில் சேர்கிறார். அவருக்கு அந்நிறுவனம் முதல் மாத ஊதியமாக ₹$60,000$ வழங்குகிறது மற்றும் ஆண்டு ஊதிய உயர்வு 5% வழங்குவதாக ஒப்புக்கொள்கிறது. 5 வருட முடிவில் அவருடைய மாத ஊதியம் எவ்வளவு?

11. சிவமணி ஒரு பணிக்கான நேர்காணலில் பங்கேற்கிறார். அந்நிறுவனம் அவருக்கு இரண்டு விதமான வாய்ப்புகளை வழங்குகிறது.

    வாய்ப்பு A: முதல் மாத ஊதியம் ₹$20,000$ மற்றும் நிச்சயமான 6% ஆண்டு ஊதிய உயர்வு 5 ஆண்டுகளுக்கு.

    வாய்ப்பு B: முதல் மாத ஊதியம் ₹$22,000$ மற்றும் நிச்சயமான 3% ஆண்டு ஊதிய உயர்வு 5 ஆண்டுகளுக்கு.

    A மற்றும் B ஆகிய இரு வாய்ப்புகளிலும் அவருடைய 4–வது வருட ஊதியம் எவ்வளவு?

12. a, b, c என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள மூன்று அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் மற்றும் $x,\ y,\ z$ என்பன ஒரு பெருக்கு தொடர்வசையின் மூன்று அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் எனில் $x^{b-c} \times y^{c-a} \times z^{a-b} = 1$ என நிறுவுக.

2.10 பெருக்குத்தொடர் வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல். (Sum to n terms of a G.P.)

ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமைந்தால் அந்தத் தொடர் பெருக்குத் தொடர் எனப்படும்.

$a,\ ar,\ ar^2,\ \ldots ar^{n-1},\ \ldots$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை என்க. பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \qquad \ldots (1)$$

இருபுறமும் r ஆல் பெருக்க நாம் பெறுவது, $rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \ldots (2)$

$$(2)-(1) \Rightarrow rS_n - S_n = ar^n - a$$

$$S_n(r-1) = a(r^n - 1)$$

ஆகவே ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1},\ r \neq 1$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புகள் பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் இருக்குமானால் அது ________ எனப்படும்.
2. $r = 1$ எனும்போது பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காணும் சூத்திரம் _______.
3. $r \neq 1$ எனும்போது பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காணும் சூத்திரம் _______.

குறிப்பு

$r = 1$ எனும் போது பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதலைக் காண மேற்கண்ட சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த முடியாது.

$r = 1$, எனில்,

$S_n = a + a + a + \cdots + a = na$

2.10.1 பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் (Sum to infinite terms of a G.P.)

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல்

$$S_\infty = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}, -1 < r < 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.46 $1, -3, 9, -27\ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் 8 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு முதல் உறுப்பு $a = 1$, பொது விகிதம் $r = \frac{-3}{1} = -3 < 1$, $n = 8$.

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$, $r \neq 1$

ஆகவே, $$S_8 = \frac{1\left((-3)^8 - 1\right)}{(-3)-1} = \frac{6561-1}{-4} = -1640$$

எடுத்துக்காட்டு 2.47 ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் $S_6 = 4095$ மற்றும் $r = 4$ எனில், அதன் முதல் உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு பொது விகிதம் $= 4 > 1$, முதல் 6 உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_6 = 4095$

எனவே, $$S_6 = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = 4095$$

$r = 4$ என்பதால், $$\frac{a(4^6 - 1)}{4-1} = 4095 \Rightarrow a \times \frac{4095}{3} = 4095$$

முதல் உறுப்பு $a = 3$.

எடுத்துக்காட்டு 2.48 $1 + 4 + 16 + \cdots$ என்ற தொடரின் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் 1365 கிடைக்கும்?

தீர்வு கூடுதல் 1365 கிடைக்க கூட்ட வேண்டிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை n என்க.

$$a = 1,\ r = \frac{4}{1} = 4 > 1$$

$$S_n = 1365 \Rightarrow \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = 1365$$

$$\frac{1(4^n - 1)}{4-1} = 1365 \text{ எனவே, } (4^n - 1) = 4095$$

$$4^n = 4096 \Rightarrow 4^n = 4^6$$

$$n = 6$$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல்____
2. பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காணும் சூத்திரம் r -யின் எம்மதிப்புகளுக்குப் பொருந்தும்?

எடுத்துக்காட்டு 2.49 $3+1+\frac{1}{3}+\ldots\infty$ என்ற தொடரின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு இங்கு $a=3$, $r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{1}{3}$

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் $S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{3}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 2.50 $0.6666\ldots$ என்ற எண்ணின் விகிதமுறு வடிவம் காண்க

தீர்வு $0.6666\ldots$ என்ற எண்ணைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$0.6666\ldots=0.6+0.06+0.006+0.0006+\cdots$$

$0.6, 0.06, 0.006\ldots$ என்ற எண்கள் ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையை அமைக்கின்றன. முதல் உறுப்பு $a=0.6$, பொது விகிதம் $r=\frac{0.06}{0.6}=0.1$. மேலும் $-1<r=0.1<1$

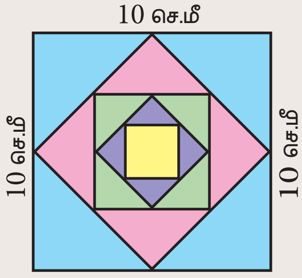
பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த நாம் பெறுவது,

$$0.6666...=0.6+0.06+0.006+0.0006+\cdots=\frac{0.6}{1-0.1}=\frac{0.6}{0.9}=\frac{2}{3}$$

ஆகவே $0.6666\ldots$ என்ற எண்ணின் விகிதமுறு வடிவம் $\frac{2}{3}$ ஆகும்.

செயல்பாடு 5

கொடுக்கப்பட்ட சதுரத்தின் பக்கம் 10 செ.மீ. இதன் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து ஒரு புதிய சதுரம் உருவாக்கப்படுகிறது. இந்தப் புதிய சதுரத்தின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து மீண்டும் ஒரு சதுரம் உருவாக்கப்படுகிறது. இந்தச் செயல்முறை முடிவில்லாமல் தொடர்கிறது. இந்தச் செயல்முறையில் உருவான சதுரங்களின் பரப்பளவு மற்றும் சுற்றளவுகளின் கூடுதல் காண்க.



படம் 2.15

எடுத்துக்காட்டு 2.51 $5+55+555+\cdots$ என்ற தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு $5+55+555+\cdots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையும் அல்ல, பெருக்குத் தொடர்வரிசையும் அல்ல. எனவே, இந்தத் தொடரை இரு தொடர்களாகப் பிரித்துக் கூடுதல் காண்போம்.

$$5+55+555+\ldots n \text{ உறுப்புகள் வரை} = 5[1+11+111+\ldots n \text{ உறுப்புகள் வரை}]$$

$$=\frac{5}{9}[9+99+999+\cdots n \text{ உறுப்புகள் வரை}]$$

$$=\frac{5}{9}[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots n \text{ உறுப்புகள் வரை}]$$

$$=\frac{5}{9}[(10+100+1000+\cdots n \text{ உறுப்புகள் வரை})-n]$$

$$=\frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{(10-1)}-n\right]=\frac{50(10^n-1)}{81}-\frac{5n}{9}$$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. $3+33+333+\ldots$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடரா?
2. $1+r+r^2+r^3\ldots=\frac{3}{4}$ என்றவாறு அமையும் r–யின் மதிப்பு ____.

எடுத்துக்காட்டு 2.52 $1+6+6^2+\cdots+6^n>5000$ என்றவாறு அமையும் மிகச் சிறிய மிகைமுழு எண் n காண்க.

தீர்வு எத்தனை குறைவான உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் 5000–ஐத் தாண்டும் என நாம் காண வேண்டும்.

அதாவது எந்தக் குறைவான n மதிப்பிற்கு $S_n > 5000$ வரும் எனக் காண வேண்டும்.

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{1(6^n-1)}{6-1} = \frac{6^n-1}{5}$$

$$S_n > 5000 \Rightarrow \frac{6^n-1}{5} > 5000$$

$$6^n - 1 > 25000 \Rightarrow 6^n > 25001$$

$6^5 = 7776$ மற்றும் $6^6 = 46656$ என்பதால்

$1+6+6^2+\cdots+6^n>5000$ என்றவாறு அமையும் மிகச்சிறிய n -ன் மதிப்பு 6 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.53 ஒரு நபர் ஒவ்வோர் ஆண்டும் அதற்கு முந்தைய ஆண்டு சேமித்த தொகையில் பாதியைச் சேமிக்கிறார். 6 ஆண்டுகளில் அவர் ₹7875–ஐச் சேமிக்கிறார் எனில், முதல் ஆண்டில் அவர் சேமித்த தொகை எவ்வளவு?

தீர்வு 6 ஆண்டுகளில் அவர் சேமித்த தொகை $S_6 = 7875$

ஒவ்வோர் ஆண்டும் சேமிக்கும் தொகையானது அதற்கு முந்தைய ஆண்டின் சேமிப்புத் தொகையில் பாதி என்பதால், $r = \frac{1}{2} < 1$

$$\frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} = \frac{a\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}} = 7875$$

$$\frac{a\left(1-\frac{1}{64}\right)}{\frac{1}{2}} = 7875 \Rightarrow a \times \frac{63}{32} = 7875 \Rightarrow a = \frac{7875\times 32}{63} \Rightarrow a = 4000$$

எனவே, அந்த நபர் முதல் ஆண்டில் சேமித்த தொகை ₹ 4000.

பயிற்சி 2.8

1. பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

   (i) $5, -3, \frac{9}{5}, -\frac{27}{25}, \ldots$ (ii) $256, 64, 16, \ldots$

2. $5, 15, 45, \ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

3. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது விகிதம் 5 மற்றும் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூடுதல் 46872 எனில், அதன் முதல் உறுப்பைக் காண்க..

4. பின்வரும் முடிவுறா தொடர்களின் கூடுதல் காண்க.

   (i) $9+3+1+\cdots$ (ii) $21+14+\frac{28}{3}+\cdots$

5. ஒரு முடிவுறா பெருக்குத் தொடரின் முதல் உறுப்பு 8 மற்றும் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் $\frac{32}{3}$ எனில் அதன் பொது விகிதம் காண்க.

X_Ch 2 TM.indd 76 07-02-2020 05:32:41 PM

6. பின்வரும் தொடர்களின் n உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காண்க.
   (i) $0.4+0.44+0.444+\cdots$ n உறுப்புகள் வரை (ii) $3+33+333+\cdots$ n உறுப்புகள் வரை
7. $3+6+12+\cdots+1536$ என்ற பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல் காண்க.
8. குமார் தனது நான்கு நண்பர்களுக்கு கடிதம் எழுதுகிறார். மேலும் தனது நண்பர்களை அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் நான்கு வெவ்வேறு நண்பர்களுக்குக் கடிதம் எழுதுமாறும் மற்றும் இந்தச் செயல்முறையைத் தொடருமாறும் கூறுகிறார். இந்தச் செயல்முறை தொடர்ச்சியாக நடைபெறுகின்றது. ஒரு கடிதத்தற்கான செலவு ₹2 எனில் 8 நிலைகள் வரை கடிதங்கள் அனுப்புவதற்கு ஆகும் மொத்தச் செலவைக் காண்க.
9. $0.\overline{123}$ என்ற எண்ணின் விகிதமுறு வடிவம் காண்க.
10. $S_n=(x+y)+(x^2+xy+y^2)+(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\cdots n$ உறுப்புகள் வரை எனில் $(x-y)S_n=\left[\frac{x^2(x^n-1)}{x-1}-\frac{y^2(y^n-1)}{y-1}\right]$ என நிறுவுக.

2.11 சிறப்புத் தொடர்கள் (Special Series)

சில தொடர்களின் கூடுதலை தனித்த சூத்திரங்கள் மூலம் காணலாம். இத்தகைய தொடர்களைச் சிறப்புத் தொடர்கள் என்கிறோம்.

இங்கு நாம் பொதுவான சில சிறப்புத் தொடர்களைக் காண உள்ளோம்.

(i) முதல் 'n' இயல் எண்களின் கூடுதல் .
(ii) முதல் 'n' ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல்.
(iii) முதல் 'n' இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்.
(iv) முதல் 'n' இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல்.

$1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ என்பதன் மதிப்பை $(x+1)^{k+1}-x^{k+1}$ என்ற கோவையைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்

2.11.1 முதல் *n* இயல் எண்களின் கூடுதல் (Sum of First n Natural Numbers)

$1+2+3+\cdots+n$, என்பதன் மதிப்பு காண $(x+1)^2-x^2=2x+1$ என்ற முற்றொருமையைப் பயன்படுத்துவோம்.

x = 1, 2, 3,.....n – 1, n எனில்

$$x=1 \Rightarrow 2^2-1^2=2(1)+1$$
$$x=2 \Rightarrow 3^2-2^2=2(2)+1$$
$$x=3 \Rightarrow 4^2-3^2=2(3)+1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$x=n-1 \Rightarrow n^2-(n-1)^2=2(n-1)+1$$
$$x=n \Rightarrow (n+1)^2-n^2=2(n)+1$$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளைக் கூட்டி அதில் இடது பக்க உறுப்புகளை நீக்கிட நாம் பெறுவது.

$$\begin{aligned}(n+1)^2-1^2 &= 2(1+2+3+\cdots+n)+n\\ n^2+2n &= 2(1+2+3+\cdots+n)+n\\ 2(1+2+3+\cdots+n) &= n^2+n=n(n+1)\\ 1+2+3+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

2.11.2 முதல் n ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல் (Sum of first n Odd Natural Numbers)

$1+3+5+\cdots+(2n-1)$

இது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை $a=1,\ d=2$ மற்றும் $l=2n-1$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a+l\right]$$
$$= \frac{n}{2}\left[1+2n-1\right]$$
$$S_n = \frac{n}{2}\times 2n = n^2$$

2.11.3 முதல் n இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் (Sum of Squares of First n Natural Numbers)

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$, –யின் மதிப்பு காண $(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$ என்ற முற்றொருமையைக் கருதுவோம்.

x = 1, 2, 3,.....n – 1, n எனில்

$$x=1 \Rightarrow 2^3-1^3=3(1)^2+3(1)+1$$
$$x=2 \Rightarrow 3^3-2^3=3(2)^2+3(2)+1$$
$$x=3 \Rightarrow 4^3-3^3=3(3)^2+3(3)+1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$x=n-1 \Rightarrow n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1$$
$$x=n \Rightarrow (n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளைக் கூட்டி, அதில் இடப்பக்க உறுப்புகளை நீக்கிட நாம் பெறுவது,

$$(n+1)^3-1^3 = 3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+n$$
$$n^3+3n^2+3n = 3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+\frac{3n(n+1)}{2}+n$$
$$3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) = n^3+3n^2+2n-\frac{3n(n+1)}{2} = \frac{2n^3+6n^2+4n-3n^2-3n}{2}$$
$$3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2) = \frac{2n^3+3n^2+n}{2} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2.11.4 முதல் n இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல் (Sum of Cubes of First n Natural Numbers)

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$–யின் மதிப்பு காண

$(x+1)^4-x^4=4x^3+6x^2+4x+1$ என்ற முற்றொருமையைக் கருதுவோம்.

x = 1, 2, 3,.....n – 1, n எனில்

$$x=1 \Rightarrow 2^4-1^4=4(1)^3+6(1)^2+4(1)+1$$
$$x=2 \Rightarrow 3^4-2^4=4(2)^3+6(2)^2+4(2)+1$$
$$x=3 \Rightarrow 4^4-3^4=4(3)^3+6(3)^2+4(3)+1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$x=n-1 \Rightarrow n^4-(n-1)^4=4(n-1)^3+6(n-1)^2+4(n-1)+1$$
$$x=n \Rightarrow (n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளைக் கூட்டி அதில் இடப்பக்க உறுப்புகளை நீக்கிட நாம் பெறுவது,

$$(n+1)^4-1^4 = 4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)+6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+4(1+2+3+\cdots+n)+n$$

$$n^4+4n^3+6n^2+4n = 4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)+6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3) = n^4+4n^3+6n^2+4n-2n^3-n^2-2n^2-n-2n^2-2n-n$$

$$4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3) = n^4+2n^3+n^2 = n^2(n^2+2n+1) = n^2(n+1)^2$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

சிறந்த நட்பு

220 மற்றும் 284 ஆகிய எண்களைக் கருதுக.

220 –யின் வகுத்திகளின் கூடுதல் (220 நீங்கலாக)

= 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284

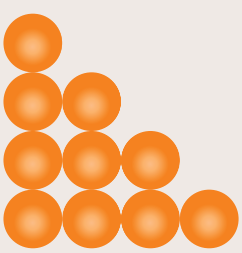
284-யின் வகுத்திகளின் கூடுதல் (284 நீங்கலாக) =1+2+4+71+142=220.

இதிலிருந்து, 220, 284 ஆகிய எண்களில் ஓர் எண் நீங்கலாக அதன் வகுத்திகளின் கூடுதலானது மற்றோர் எண்ணுக்குச் சமம்.

இவ்வாறு அமைந்த எண் ஜோடிகளை **இணக்கமான எண்கள்** அல்லது **நட்பு எண்கள் என அழைக்கிறோம்.** 220 மற்றும் 284 என்ற எண்களே மிகச் சிறிய சோடி நட்பு எண்கள் ஆகும். இவ்வெண்களைக் கண்டறிந்தவர் பிதாகரஸ் ஆவார். தற்போது வரை 12 மில்லியன் ஜோடி இணக்கமான எண்கள் கண்டறியப்பட்டுள்ளன.

செயல்பாடு 6

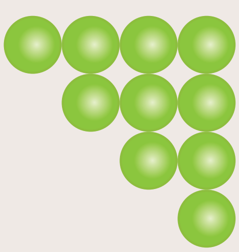
பின்வரும் முக்கோணத்தை எடுத்துக்கொள்க.



$(1+2+3+4)$

படம் 2.16

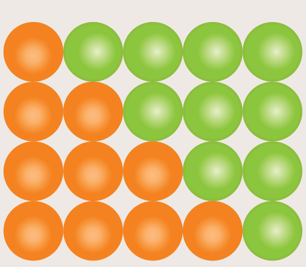
இதுபோன்ற மற்றொரு முக்கோணத்தை எடுத்துக்கொள்க



$(4+3+2+1)$

படம் 2.17

இரண்டாவது முக்கோணத்தை முதல் முக்கோணத்துடன் சேர்க்க நாம் பெறுவது.



படம் 2.18

ஆகவே, 1+2+3+4 இருமுறை சேரும்போது 4×5 அளவுள்ள ஒரு செவ்வகம் கிடைக்கிறது.

படத்தில் நாம் செய்ததை எண்களில் எழுதினால்,.

$(4+3+2+1)+(1+2+3+4) = 4\times5$

$2(1+2+3+4) = 4\times5$

எனவே, $1+2+3+4 = \frac{4\times5}{2} = 10$

இது போன்றே, முதல் 5 இயல் எண்களின் கூடுதல் காண முயற்சி செய்க. இந்த விடையிலிருந்து உனக்குத் தெரிந்த சூத்திரத்தைத் தொடர்புபடுத்துக.

1. முதல் n இயல் எண்களை ஒரு முக்கோண வடிவில் (படம் 2.16) அமைக்க முடியும் என்பதால் அவற்றின் கூடுதல் முக்கோண எண் என்று அழைக்கின்றோம்.
2. முதல் n இயல் எண்களின் வர்க்கங்களை ஒரு பிரமிடு வடிவில் அமைக்க முடியும் என்பதால் அவற்றின் கூடுதலை சதுர பிரமிடு எண் என்கிறோம்.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

சிந்தனைக் களம்

1. சதுரங்கப் பலகையில் மொத்தம் எத்தனை சதுரங்கள் உள்ளன?
2. சதுரங்கப் பலகையில் மொத்தம் எத்தனை செவ்வகங்கள் உள்ளன?

இங்கு நாம் இதுவரை விவாதித்த கூடுதல் காணும் சூத்திரங்களைத் தொகுப்போம். இந்தச் சூத்திரங்கள் முடிவுறு தொடர்களின் கூடுதல் காணப் பயன்படுகின்றன.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1+2+3+\cdots+(2n-1) = n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

எடுத்துக்காட்டு 2.54 மதிப்பு காண்க (i) $1+2+3+\ldots+50$ (ii) $16+17+18+\ldots+75$

தீர்வு (i) $1+2+3+\cdots+50$

$1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$1+2+3+\cdots+50 = \frac{50\times(50+1)}{2} = 1275$$

(ii) $$16+17+18+\cdots+75 = (1+2+3+\cdots+75)-(1+2+3+\cdots+15)$$

$$= \frac{75(75+1)}{2} - \frac{15(15+1)}{2}$$

$$= 2850-120 = 2730$$

முன்னேற்றச் சோதனை

1. முதல் n இயல் எண்களின் கணங்களின் கூடுதலானது, முதல் n இயல் எண்களின் கூடுதலின் __________ ஆகும்.
2. முதல் 100 இயல் எண்களின் சராசரி __________.

எடுத்துக்காட்டு 2.55 கூடுதல் காண்க. (i) $1+3+5+\ldots$ 40 உறுப்புகள் வரை (ii) $2+4+6+\cdots+80$ (iii) $1+3+5+\cdots+55$

தீர்வு (i) $1+3+5+\cdots 40$ உறுப்புகள் வரை $= 40^2 = 1600$

(ii) $$2+4+6+\cdots+80 = 2(1+2+3+\cdots+40) = 2\times\frac{40\times(40+1)}{2} = 1640$$

(iii) $1+3+5+\cdots+55$

இங்கு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை கொடுக்கப்படவில்லை. நாம் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை $n=\dfrac{(l-a)}{d}+1$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்போம்.

$n=\dfrac{(55-1)}{2}+1=28$ எனவே, $1+3+5+\cdots+55=(28)^2=784$

எடுத்துக்காட்டு 2.56 கூடுதல் காண்க. (i) $1^2+2^2+\cdots+19^2$

(ii) $5^2+10^2+15^2+\cdots+105^2$ (iii) $15^2+16^2+17^2+\cdots+28^2$

தீர்வு (i) $1^2+2^2+\cdots+19^2=\dfrac{19\times(19+1)(2\times19+1)}{6}=\dfrac{19\times20\times39}{6}=2470$

(ii)
$$\begin{aligned}5^2+10^2+15^2+\cdots+105^2 &= 5^2(1^2+2^2+3^2+\cdots+21^2)\\ &= 25\times\frac{21\times(21+1)(2\times21+1)}{6}\\ &= \frac{25\times21\times22\times43}{6}=82775\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}15^2+16^2+17^2+\cdots+28^2 &= (1^2+2^2+3^2+\cdots+28^2)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+14^2)\\ &= \frac{28\times29\times57}{6}-\frac{14\times15\times29}{6}=7714-1015=6699\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.57 கூடுதல் காண்க (i) $1^3+2^3+3^3+\cdots+16^3$ (ii) $9^3+10^3+\cdots+21^3$

தீர்வு (i) $1^3+2^3+3^3+\cdots+16^3=\left[\dfrac{16\times(16+1)}{2}\right]^2=(136)^2=18496$

(ii)
$$\begin{aligned}9^3+10^3+\cdots+21^3 &= (1^3+2^3+3^3+\cdots+21^3)-(1^3+2^3+3^3+\cdots+8^3)\\ &= \left[\frac{21\times(21+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{8\times(8+1)}{2}\right]^2=(231)^2-(36)^2=52065\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.58 $1+2+3+\cdots+n=666$ எனில், n–யின் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, என்பதால் $\dfrac{n(n+1)}{2}=666$

$n^2+n-1332=0 \Rightarrow (n+37)(n-36)=0$

எனவே, $n=-37$ அல்லது $n=36$

ஆனால் $n\neq-37$ (ஏனெனில் n ஓர் இயல் எண்). ஆகவே $n=36$.

முன்னேற்றச் சோதனை

சரியா, தவறா எனக் கூறுக. உனது விடைக்கான காரணம் தருக.

(i) முதல் n ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதலானது எப்போதும் ஓர் ஒற்றை எண்ணாகும்.

(ii) அடுத்தடுத்த இரட்டை எண்களின் கூடுதலானது எப்போதும் ஓர் இரட்டை எண்ணாகும்.

(iii) முதல் n இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் மற்றும் முதல் n இயல் எண்களின் கூடுதல் ஆகியவற்றிற்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் எப்போதும் 2 ஆல் வகுபடும்.

(iv) முதல் n இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதலானது எப்போதும் ஒரு வர்க்க எண்ணாகும்.

பயிற்சி 2.9

1. பின்வரும் தொடர்களின் கூடுதலைக் காண்க.
   (i) $1+2+3+\cdots+60$ (ii) $3+6+9+\cdots+96$ (iii) $51+52+53+\cdots+92$
   (iv) $1+4+9+16+\cdots+225$ (v) $6^2+7^2+8^2+\cdots+21^2$
   (vi) $10^3+11^3+12^3+\cdots+20^3$ (vii) $1+3+5+\cdots+71$
2. $1+2+3+\cdots+k=325$, எனில் $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3$ யின் மதிப்பு காண்க.
3. $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=44100$ எனில், $1+2+3+\cdots+k$ யின் மதிப்பு காண்க.
4. $1^3+2^3+3^3+\cdots$ என்ற தொடரின் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் 14400 கிடைக்கும்?
5. முதல் n இயல் எண்களின் கணங்களின் கூடுதல் 2025 எனில் n–யின் மதிப்பு காண்க.
6. ரேகாவிடம் 10 செ.மீ, 11 செ.மீ, 12 செ.மீ,...., 24 செ.மீ என்ற பக்க அளவுள்ள 15 சதுர வடிவ வண்ணக் காகிதங்கள் உள்ளன. இந்த வண்ணக் காகிதங்களைக் கொண்டு எவ்வளவு பரப்பை அடைத்து அலங்கரிக்க முடியும்?
7. $(2^3-1^3)+(4^3-3^3)+(6^3-5^3)+\cdots$ என்ற தொடர்வரிசையின்
   (i) n உறுப்புகள் வரை (ii) 8 உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காண்க.

3PDY4D

பயிற்சி 2.10

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தின் படி, a மற்றும் b என்ற மிகை முழுக்களுக்கு, தனித்த மிகை முழுக்கள் q மற்றும் $r, a=bq+r$ என்றவாறு அமையுமானால், இங்கு r ஆனது,
   (அ) $1<r<b$ (ஆ) $0<r<b$ (இ) $0\le r<b$ (ஈ) $0<r\le b$
2. யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, எந்த மிகை முழுவின் கனத்தையும் 9ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதிகள்
   (அ) 0, 1, 8 (ஆ) 1, 4, 8 (இ) 0, 1, 3 (ஈ) 1, 3, 5
3. 65 மற்றும் 117–யின் மீ.பொ.வ–வை $65m$–117 என்ற வடிவில் எழுதும்போது, m–யின் மதிப்பு
   (அ) 4 (ஆ) 2 (இ) 1 (ஈ) 3
4. 1729–ஐ பகாக் காரணிப்படுத்தும் போது, அந்தப் பகா எண்களின் அடுக்குகளின் கூடுதல்
   (அ) 1 (ஆ) 2 (இ) 3 (ஈ) 4
5. 1 முதல் 10 வரையுள்ள (இரண்டு எண்களும் உட்பட) அனைத்து எண்களாலும் வகுபடும் மிகச்சிறிய எண்
   (அ) 2025 (ஆ) 5220 (இ) 5025 (ஈ) 2520
6. $7^{4k}\equiv$ ______ (மட்டு 100)
   (அ) 1 (ஆ) 2 (இ) 3 (ஈ) 4
7. $F_1=1,\ F_2=3$ மற்றும் $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ எனக் கொடுக்கப்படின் F_5 ஆனது
   (அ)3 (ஆ)5 (இ)8 (ஈ)11
8. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு 1 மற்றும் பொது வித்தியாசம் 4 எனில், பின்வரும் எண்களில் எது இந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும்?
   (அ) 4551 (ஆ) 10091 (இ) 7881 (ஈ) 13531

9. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 6வது உறுப்பின் 6 மடங்கும் 7 வது உறுப்பின் 7 மடங்கும் சமம் எனில், அக்கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 13–வது உறுப்பு

(அ) 0 (ஆ) 6 (இ) 7 (ஈ) 13

10. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் 31 உறுப்புகள் உள்ளன. அதன் 16–வது உறுப்பு m எனில், அந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளின் கூடுதல்.

(அ) 16 m (ஆ) 62 m (இ) 31 m (ஈ) $\frac{31}{2}$ m

11. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முதல் உறுப்பு 1 மற்றும் பொது வித்தியாசம் 4. இந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் அதன் கூடுதல் 120 கிடைக்கும்?

(அ) 6 (ஆ) 7 (இ) 8 (ஈ) 9

12. $A = 2^{65}$ மற்றும் $B = 2^{64} + 2^{63} + 2^{62} + \cdots + 2^{0}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பின்வருவனவற்றில் எது உண்மை?

(அ) B ஆனது A ஐ விட 2^{64} அதிகம் (ஆ) A மற்றும் B சமம்

(இ) B ஆனது A-ஐ விட 1 அதிகம் (ஈ) A ஆனது B–ஐ விட 1 அதிகம்

13. $\frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \cdots$ என்ற தொடர்வரிசையின் அடுத்த உறுப்பு

(அ) $\frac{1}{24}$ (ஆ) $\frac{1}{27}$ (இ) $\frac{2}{3}$ (ஈ) $\frac{1}{81}$

14. $t_1, t_2, t_3, \ldots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனில், $t_6, t_{12}, t_{18}, \ldots$ என்பது

(அ) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை (ஆ) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை

(இ) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையுமல்ல, பெருக்குத் தொடர்வரிசையுமல்ல

(ஈ) ஒரு மாறிலித் தொடர் வரிசை

15. $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 15^3) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 15)$ யின் மதிப்பு

(அ) 14400 (ஆ) 14200 (இ) 14280 (ஈ) 14520

அலகுப் பயிற்சி - 2

1. எல்லா மிகை முழுக்கள் n –க்கும் $n^2 - n$ ஆனது 2–ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

2. ஒரு பால்காரரிடம் 175 லிட்டர் பசும் பாலும் 105 லிட்டர் எருமைப்பாலும் உள்ளது. இவற்றை அவர் சம கொள்ளளவுக் கொண்ட இருவகையான கலன்களில் அடைத்து விற்க விருப்பப்படுகிறார். (i)இவ்வாறு விற்பதற்குத் தேவைப்படும் கலன்களின் அதிகபட்ச கொள்ளளவு எவ்வளவு? இவ்வாறாக (ii) எத்தனை கலன் பசும்பால் மற்றும் (iii) எருமைப்பால் விற்கப்பட்டிருக்கும்?

3. a, b, c என்ற எண்களை 13 ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதிகள் முறையே 9,7 மற்றும் 10. $a + 2b + 3c$ ஐ 13–ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

4. 107 ஆனது $4q + 3$, q என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு என்ற வடிவில் அமையும் என நிறுவுக.

5. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $(m+1)^{th}$ வது உறுப்பானது $(n+1)^{th}$ வது உறுப்பின் இரு மடங்கு எனில், $(3m+1)^{\text{th}}$ வது உறுப்பானது $(m+n+1)^{th}$ வது உறுப்பின் இரு மடங்கு என நிறுவுக.

6. $-2, -4, -6, \ldots -100$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இறுதி உறுப்பிலிருந்து 12வது உறுப்பைக் காண்க.

7. இரண்டு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகள் ஒரே பொதுவித்தியாசம் கொண்டுள்ளன. ஒரு தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு 2 மற்றும் மற்றொரு தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு 7. இரு தொடர்வரிசைகளின் 10வது உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம், 21–வது உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசத்திற்குச் சமம் என நிருபித்து உள்ளது. இந்த வித்தியாசம் அந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் பொது வித்தியாசத்திற்குச் சமமாக உள்ளது என நிறுவுக.

8. ஒரு நபர் 10 வருடங்களில் ₹16500 ஐ சேமிக்கிறார். ஒவ்வொரு வருடமும் அவர் சேமிக்கும் தொகையானது அதற்கு முந்தைய வருடம் சேமிக்கும் தொகையை விட ₹100 அதிகம். அவர் முதல் வருடம் எவ்வளவு சேமித்திருப்பார்?

9. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் 2–வது உறுப்பு $\sqrt{6}$ மற்றும் 6–வது உறுப்பு $9\sqrt{6}$ எனில் அந்தத் தொடர்வரிசையைக் காண்க.

10. ஒரு வாகனத்தின் மதிப்பு ஒவ்வோர் ஆண்டும் 15% குறைகிறது. வாகனத்தின் தற்போதைய மதிப்பு ₹45000 எனில், 3 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு வாகனத்தின் மதிப்பு என்ன?

நினைவில் கொள்ள வேண்டியவை

- **யூக்ளிடின் வகுத்தல் துணைத் தேற்றம்**

  a மற்றும் b என்பன இரு மிகை முழுக்கள் எனில், $a = bq + r,\ 0 \le r < |b|$ என்றவாறு $q,\ r$ எனும் தனித்த மிகை முழுக்கள் கிடைக்கும்.

- **அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றம்**

  எல்லாப் பகு எண்களும் தனித்த பகா எண்களின் பெருக்கற்பலனாகக் காரணிப்படுத்த இயலும், பகா எண்களின் வரிசை மாறலாம்.

- **கூட்டுத் தொடர்வரிசை**

  (i) கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொதுவடிவம் $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ldots.$
  n–வது உறுப்பு $t_n = a + (n-1)d$

  (ii) கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

  (iii) கடைசி உறுப்பு l (n வது உறுப்பு) கொடுக்கப்பட்டால் $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

- **பெருக்குத் தொடர்வரிசை**

  (i) பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது வடிவம் $a,\ ar,\ ar^2,\ldots,ar^{n-1}$.
  n–வது உறுப்பு $t_n = ar^{n-1}$

  (ii) பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$
  இங்கு, $r \ne 1$

  (iii) $r = 1$ எனில், $S_n = na$

  (iv) பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் $a + ar + ar^2 + \cdots$
  $S_\infty = \frac{a}{1-r}$, இங்கு, $-1 < r < 1$

- **சிறப்புத் தொடர்கள்**

(i) முதல் n இயல் எண்களின் கூடுதல் $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(ii) முதல் n இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) முதல் n இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல் $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(iv) முதல் n ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல் $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

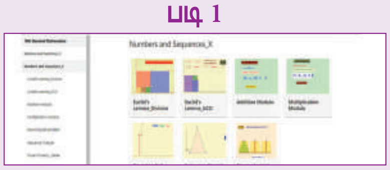
இணையச் செயல்பாடு (ICT)

ICT 2.1

படி 1 உலாவியைத் திறந்து கீழ்க்கண்ட URL இணைப்பைத் தட்டச்சு செய்யும் (அ) விரைவுக் குறியீட்டை scan செய்யும். Numbers and Sequences எனற ஜியோஜீப்ரா பயிற்சி ஏடு திறக்கப்படும். பயிற்சி ஏட்டின் இடது பக்கத்தில் எண்களும் தொடர்வரிசைகளும் பாடம் சார்ந்த பல செயல்பாடுகள் இருக்கும். அதில் Euclid's lemma Division என்ற பயிற்சித்தாளை தேர்ந்தெடுக்கவும்.

படி 2 பயிற்சித்தாளில் Drag me என்ற புள்ளியை இழுத்து தேவையான புள்ளியில் வைக்கவும் இப்போது பாடப்புத்தகத்தில் படித்த வகுத்தல் வழிமுறையை ஒப்பிடவும்.

படி 1



படி 2

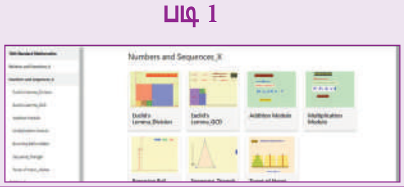
முடிவுகள்

ICT 2.2

படி 1 உலாவியைத் திறந்து கீழ்க்கண்ட URL இணைப்பைத் தட்டச்சு செய்யவும் (அல்லது) விரைவுக் குறியீட்டை scan செய்யவும் Numbers and sequences என்ற ஜியோஜீப்ரா பயிற்சி ஏடு திறக்கப்படும். பயிற்சி ஏட்டின் இடதுபக்கத்தில எண்களும் தொடர்வரிசைகளும் பாடம் சார்ந்த பல செயல்பாடுகள் இருக்கும் அதில் Bouncing ball problem என்ற பயிற்சித்தாளை தேர்ந்தெடுக்கவும்.

படி 2 பயிற்சித்தாளில் height number of bounces மற்றும் debounce ratio ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை மாற்றவும். Get ball மற்றும் Drop என்பதை click செய்யவும். நீங்கள் பதிவிட்ட மதிப்புகளுக்குத் தகுந்தவாறு பந்து குதித்து மேலெழும்பும். வலதுபக்கத்தில் தொடர் வரிசைகளின் கூடுதல் கண்டறிவதை காணலாம்.

படி 1



படி 2

முடிவுகள்

இந்தப் படிகளைக் கொண்டு மற்ற செயல்பாடுகளைச் செய்க.

https://www.geogebra.org/m/jfr2zzgy#chapter/356192

அல்லது விரைவுச் செயலியை ஸ்கேன் செய்யவும்

B371_10_MATHS_TM

பயிற்சி 1.5

1.(i) $x^2-6,\ (x-6)^2$; சமமில்லை (ii) $\frac{2}{2x^2-1}, \frac{8}{x^2}-1$; சமமில்லை

(iii) $\frac{3-x}{3}, \frac{9-x}{3}$; சமமில்லை (iv) $x-1,\ x-1$; சமம் (v) $4x^2+8x+3,\ 4x^2$; சமமில்லை

2.(i) -5 (ii) $\frac{-5}{3}$ 4. $a=\pm 2$

5. $\{y \mid y=2x^2+1,\ x\in\mathbb{N}\}$; $\{y \mid y=(2x+1)^2, x\in\mathbb{N}\}$ 6.(i) x^4-2x^2

(ii) $\left[x^4-2x^2\right]^2-1$ 7. f ஆனது ஒன்றுக்கொன்று, g ஆனது ஒன்றுக்கொன்று இல்லை, $f\circ g$ ஆனது ஒன்றுக்கொன்று இல்லை 9. $-4x-1$

பயிற்சி 1.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(இ)	(இ)	(அ)	(ஆ)	(இ)	(ஈ)	(ஈ)	(அ)	(இ)	(இ)	(அ)	(ஈ)	(இ)	(ஆ)	(ஈ)

அலகு பயிற்சி–1

1. 1, 2 மற்றும் -5, 1 2. $\{-1,0,1\}$, $\{(-1,-1),(-1,1),(0,-1),(0,0),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$

3. (i) 4 (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{a}$

4. $\{(9,3),(10,5),(11,11),(12,3),(13,13),(14,7),(15,5),(16,2),(17,17)\}$, $\{2,3,5,7,11,13,17\}$

5. $-1\le x\le 1$ 9.(i) $\frac{-5}{6}$ (ii) $2(x+1)$ 10.(i) $R-\{9\}$ (ii) R (iii) $[2,\infty)$ (iv) R

பயிற்சி 2.1

1. 2, 5, 8, 11, … 2. 25, 7 6.(i) 4 (ii) 51

(iii) 144 (iv) 6 7. 174 8. $2,-1$ 9. 6

பயிற்சி 2.2

1. இரட்டை எண்கள் 2. மதிப்பு இல்லை 3. 10101 4. 9, 3

5. 2,3,5,7 மற்றும் 3,4,2,1 6. 2040, 34 7. 999720 8. 3647 9. 2520

பயிற்சி 2.3

1.(i) 7 (ii) 5 (iii) 2 (iv) 7 (v) 2

2. 3 3. 2,8,14,… 4. 8, 19, 30, … 5. 11 மு.ப

6. 8 பி.ப 7. வெள்ளி 9. 2 10. 6 மு.ப, திங்கள்

பயிற்சி 2.4

1.(i) 216,648,1944 (ii) $-7,-11,-15$ (iii) $\frac{4}{25},\frac{5}{36},\frac{6}{49}$ 2.(i) $-1,6,25,62$

(ii) $2, -6, 12, -20$ (iii) $-4, 2, 12, 26$ 3.(i) $n^2 + 1$ (ii) $\frac{n-1}{n}$

(iii) $5n - 2$ 4.(i) $\frac{15}{4}, \frac{13}{3}$ (ii) $-12, -117$ 5. $\frac{63}{11}, \frac{225}{31}$ 6. $1, 1, 3, 7, 17, 41$

பயிற்சி 2.5

1.(i) கூட்டுத் தொடர்வரிசை (ii) கூட்டுத் தொடர்வரிசை இல்லை

(iii) கூட்டுத் தொடர்வரிசை (iv) கூட்டுத் தொடர்வரிசை

(v) கூட்டுத் தொடர்வரிசை இல்லை 2.(i) 5, 11, 17, … (ii) $7, 2, -3, \ldots$ (iii) $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \ldots$

3.(i) $-1, 2$ (ii) $-3, -7$ 4. -83 5. 15 6. 93, 99 8. 4 9. 3,17,31

10. 78 11. 2,9,16 12. 5:7 13. $-3^\circ C, 0^\circ C, 3^\circ C, 6^\circ C, 9^\circ C$ 14. 31 ஆண்டுகள்

பயிற்சி 2.6

1.(i) 3240 (ii) 999 (iii) 721 2. 20 3. 1540

5. 612.5 6. 50625 7. 168448 8.(i) ₹ 45750 (ii) ₹ 5750 9. 20 மாதங்கள்

10.(i) 42 (ii) 2130 12. $\frac{6}{a+b}(24a - 13b)$

பயிற்சி 2.7

1.(i) பெருக்குத் தொடர்வரிசை (ii) பெருக்குத் தொடர்வரிசை இல்லை

(iii) பெருக்குத் தொடர்வரிசை (iv) பெருக்குத் தொடர்வரிசை (v) பெருக்குத் தொடர்வரிசை

(vi) பெருக்குத் தொடர்வரிசை இல்லை (vii) பெருக்குத் தொடர்வரிசை

2.(i) 6,18,54 (ii) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$

(iii) 1000,400,160 3. 1 4. -18 5.(i) 12 (ii) 7 6. $5 \times (3^{11})$

7. 3072 9. $\frac{9}{2}, 3, 2$ அல்லது $2, 3, \frac{9}{2}$ 10. ₹ 76577 11. ₹ 23820, ₹ 24040

பயிற்சி 2.8

1.(i) $\frac{25}{8}\left[1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^n\right]$ (ii) $\frac{1024}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$ 2. 1820 3. 12

4.(i) $\frac{27}{2}$ (ii) 63 5. $\frac{1}{4}$ 6.(i) $\frac{4}{9}n - \frac{4\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{81}$

(ii) $\frac{10(10^n - 1)}{27} - \frac{n}{3}$ 7. 3069 8. ₹ 174760 9. $\frac{41}{333}$

பயிற்சி 2.9

1.(i) 1830 (ii) 1584 (iii) 3003 (iv) 1240 (v) 3256 (vi) 42075 (vii) 1296

2. 105625 3. 210 4. 15 5. 9 6. 4615 செ.மீ^{2} 7.(i) $4n^3 + 3n^2$ (ii) 2240

பயிற்சி 2.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(இ)	(அ)	(ஆ)	(இ)	(ஈ)	(அ)	(ஈ)	(இ)	(அ)	(இ)	(இ)	(ஈ)	(ஆ)	(ஆ)	(இ)

அலகு பயிற்சி–2

2.(i) 35 லிட்டர் (ii) 5 (iii) 3 3. 1 6. -78 8. ₹1200 9. $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, \ldots$ 10. ₹27636

பயிற்சி 3.1

1.(i) $2, -1, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (iii) 35, 30, 25

2.(i) எண்ணற்ற தீர்வுகள் (ii) தீர்வு இல்லை (iii) ஒரே தீர்வு

3. 24 ஆண்டுகள், 51 ஆண்டுகள், 84 ஆண்டுகள் 4. 137 5. 7, 3, 2

பயிற்சி 3.2

1.(i) $x^2 + 2x - 3$ (ii) $x^2 + 1$ (iii) $x(x^2 + 4x + 4)$ (iv) $3(x^2 + 1)$

2.(i) $8x^3y^2$ (ii) $-36a^3b^2c$ (iii) $-48m^2n^2$ (iv) $(p-1)(p-2)(p+2)$

(v) $4(x+3)(2x+1)(x-3)$ (vi) $2^3x^2(2x-3y)^3(4x^2+6xy+9y^2)$

பயிற்சி 3.3

1.(i) $7xy,\ 105x^2y^2$ (ii) $(x+1),\ (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(iii) $x(x+y),\ xy(x+y)$ 2.(i) $(a+6)(a-2)(a-3)$ (ii) $x(x-3a)^2(x^2+3ax+9a^2)$

3.(i) $4x^2(x-1)$ (ii) $x^2 - xy + y^2$ 4. (i) $(a+2)(a-7)$ (ii) $(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)$

பயிற்சி 3.4

1.(i) $\frac{x-1}{x}$ (ii) $\frac{x-9}{x-2}$ (iii) $\frac{9}{x-1}$ (iv) $\frac{p+5}{2p(p-4)}$

2.(i) $-5, 5$ (ii) 2, 3 (iii) 1 (iv) $0, -3, 2$

பயிற்சி 3.5

1.(i) $\frac{3x^3z}{5y^3}$ (ii) $p+4$ (iii) $\frac{3t^2}{4}$ 2.(i) $\frac{3x-4y}{2x-5}$ (ii) $\frac{x^2+xy+y^2}{3(x+2y)}$

3.(i) -5 (ii) $\frac{b-4}{b+2}$ (iii) $\frac{3y}{x-3}$ (iv) $\frac{4(2t-1)}{3}$ 4. $\frac{4}{9}$ 5. x^2+4x+4